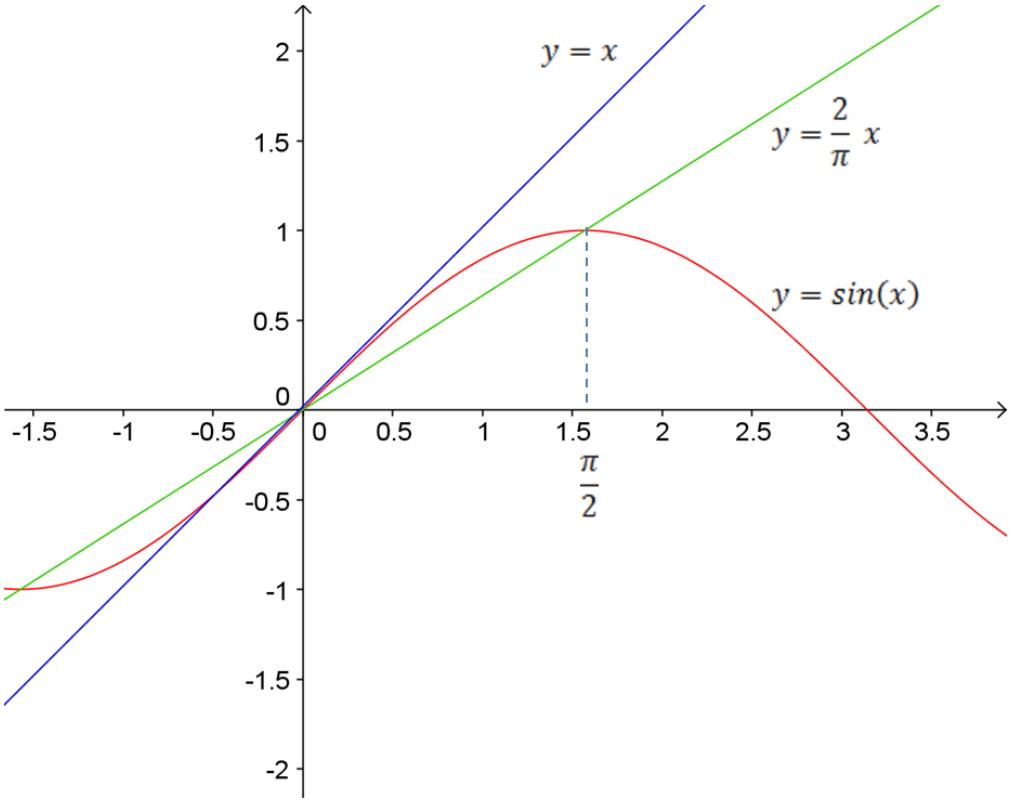
Encadrement affine des fonctions sinus et tangente

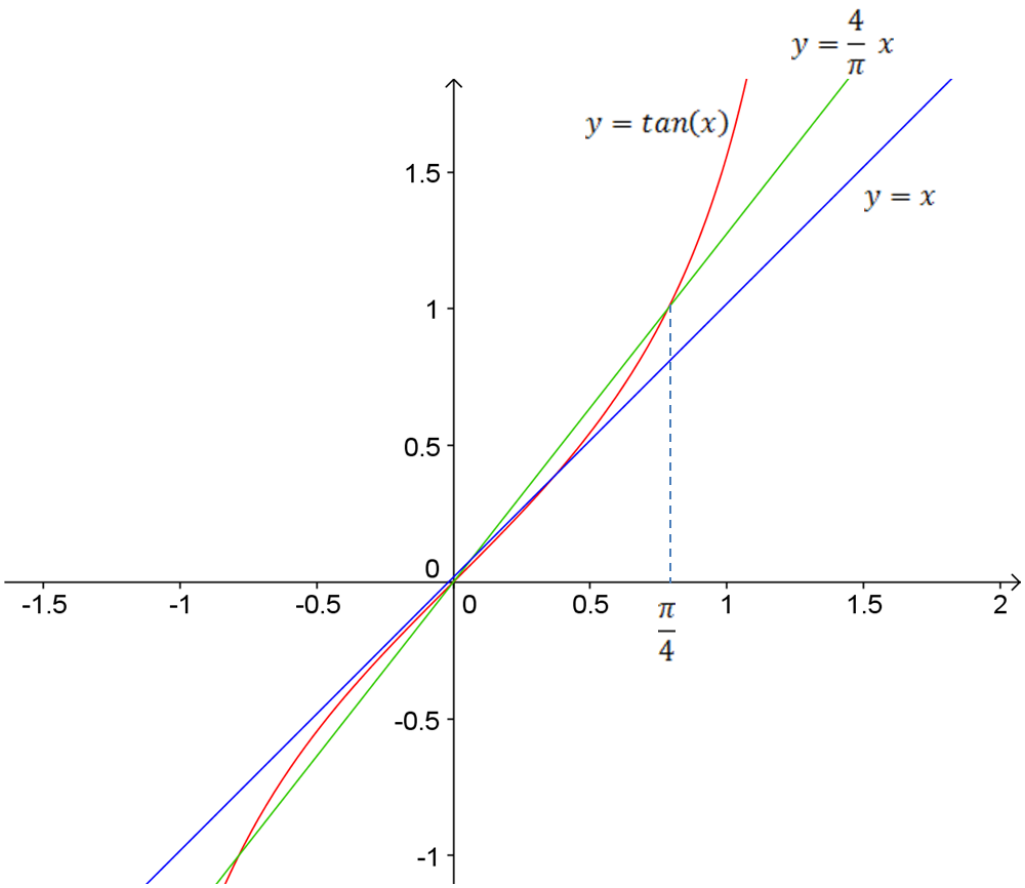
La fonction sinus étant concave sur $[0; \pi/2]$ elle peut être encadrée par sa fonction tangente en 0 et la fonction affine définie par sa corde entre 0 et $\pi/2$ à savoir :

$$\frac{2}{\pi}\, x \ \leq sin(x) \leq x$$



De même, la fonction tangente étant convexe sur $]0; \pi/4[$ elle peut être encadrée par sa fonction tangente en 0 et la fonction affine définie par sa corde entre 0 et $\pi/4$ à savoir :

$$x \leq tan(x) \leq \frac{4}{\pi}\, x$$



<u>Preuves</u> :

Nous allons prouver ces encadrements sans utiliser la convexité. Considérons pour cela les fonctions :

Sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$$f(x) = sin(x) - x$$

$$g(x) = sin(x) - \frac{2}{\pi}\ x$$

Sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

$$h(x) = tan(x) - x$$

$$k(x) = tan(x) - \frac{4}{\pi}\ x$$

Leurs dérivées sont :

$$f'(x) = cos(x) - 1$$

$$g'(x) = cos(x) - \frac{2}{\pi}$$

$$h'(x) = tan^2(x)$$

$$k'(x) = \frac{1}{cos^2(x)} - \frac{4}{\pi}$$

Introduisons :

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

$$\beta = cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

Alors :

$$g'(x) = cos(x) - cos(\alpha)$$

$$k'(x) = \frac{1}{cos^2(x)} - \frac{1}{cos^2(\beta)}$$

$g'(x)$ est donc strictement décroissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et s'annule en α et $k'(x)$ est strictement croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ et s'annule en β. On en déduit les tableaux de variation :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
signe de $f'(x)$	0	$-$	
Variations de f	0	$\searrow$	

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

x	0			$\frac{\pi}{4}$
signe de $h'(x)$	0		$+$	
Variations de h	0		$\nearrow$	

x	0		β		$\frac{\pi}{4}$
signe de $k'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de k	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Il en résulte les signes :

Sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$$f(x) \leq 0$$

$$g(x) \geq 0$$

Sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

$$h(x) \geq 0$$

$$k(x) \leq 0$$

D'où les encadrements.