Vers la formule de Taylor

Dans cet exercice est proposée une démarche permettant de découvrir intuitivement la forme du développement limité d'une fonction en un point en se plaçant dans le cas particulier des polynômes, puisque la philosophie d'un développement limité est précisément de remplacer, à des approximations près, une fonction par un polynôme au voisinage d'un point (développement de Taylor Young) ou sur tout un intervalle (développement de Taylor Lagrange)

1ère étape : Polynômes de degré inférieur ou égal à 1

Soit P un polynôme de la forme : $P(X) = a_0 + a_1 X$ et a un réel quelconque, alors on sait que la courbe représentative de ce polynôme dans un repère orthogonal est une droite qui se confond avec la tangente au point a.

Exprimer alors pour un réel x quelconque, $P(x)$ en fonction de $P(a), P'(a), x, a$

2ème étape : Polynômes de degré inférieur ou égal à 2

Soit P un polynôme de la forme : $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et a un réel quelconque.

Ecrire la relation précédente pour le polynôme dérivé $P'(X) = a_1 + 2\, a_2 X$ de degré inférieur ou égal à un. En déduire pour tout réel x une expression de $P(x)$ en fonction de $P(a), P'(a), P''(a), x, a$

3ème étape : Polynômes de degré inférieur ou égal à 3

Reprendre le principe précédent et en déduire pour tout réel x une expression de $P(x)$ en fonction de $P(a), P'(a), P''(a), P'''(a), x, a$

4ème étape : Conjecture et preuve pour un polynôme général

Si P est un polynôme de degré n, conjecturer une expression de $P(x)$ en fonction de $P(a), P'(a), P''(a), \dots, P^{(n)}(a), x, a$ et la prouver par récurrence sur n

Solutions

<u>1ère étape : Polynômes de degré inférieur ou égal à 1</u>

La relation est :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} : P(x) = P(a) + (x-a)\, P'(a)}$$

<u>2ème étape : Polynômes de degré inférieur ou égal à 2</u>

Soit P un polynôme de la forme : $P(X) = a_0 + a_1\, X + a_2\, X^2$ et a un réel quelconque, alors le polynôme dérivé $P'(X) = a_1 + 2\, a_2\, X$ est de degré inférieur ou égal à un donc :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : P'(t) = P'(a) + (t-a)\, P''(a)$$

Intégrons cette relation entre a et un réel x quelconque, on obtient :

$$\int_a^x P'(t)\, dt = \int_a^x \big(P'(a) + (t-a)\, P''(a)\big)\, dt$$

d'où :

$$[P(t)]_a^x = \left[(t-a)\, P'(a) + \frac{(t-a)^2}{2}\, P''(a)\right]_a^x$$

soit :

$$P(x) - P(a) = (x-a)\, P'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\, P''(a)$$

Finalement

$$\boxed{P(x) = P(a) + (x-a)\, P'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\, P''(a)}$$

<u>3ème étape : Polynômes de degré inférieur ou égal à 3</u>

Soit P un polynôme de la forme : $P(X) = a_0 + a_1\, X + a_2\, X^2 + a_3\, X^3$ et a un réel quelconque, alors le polynôme dérivé $P'(X) = a_1 + 2\, a_2\, X + 3\, a_3\, X^2$ est de degré inférieur ou égal à deux donc :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : P'(t) = P'(a) + (t-a)\,(P')'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\,(P')''(a)$$

Intégrons cette relation entre a et un réel x quelconque, on obtient :

$$\int_a^x P'(t)\,dt = \int_a^x \left(P'(a) + (t-a)\,P''(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\,P'''(a)\right) dt$$

d'où :

$$[P(t)]_a^x = \left[(t-a)\,P'(a) + \frac{(t-a)^2}{2}\,P''(a) + \frac{(t-a)^3}{3\,!}\,P'''(a)\right]_a^x$$

soit :

$$P(x) - P(a) = (x-a)\,P'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\,P''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}\,P'''(a)$$

Finalement

$$\boxed{P(x) = P(a) + (x-a)\,P'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\,P''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}\,P'''(a)}$$

<u>4ème étape :</u>

, on peut conjecturer la propriété $Q(n)$:

Si P est un polynôme de degré n et a un réel quelconque alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad P(x) = P(a) + (x-a)\,P'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}\,P''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}\,P^{(n)}(a)$$

Pour plus de commodités, nous poserons $P^{(0)}(a) = P(a),\ P^{(1)}(a) = P'(a),\ etc$ …

et nous emploierons la notation sigma. $Q(n)$ s'écrit alors :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!}\,P^{(k)}(a)}$$

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad P(x) = P(a) = \frac{(x-a)^0}{0!}$$

Donc $Q(0)$ est vraie

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$ soit vraie.

Soit donc un polynôme P de degré $n+1$ et a un réel quelconque alors le polynôme dérivé P' est de degré n. L'hypothèse de récurrence s'applique à ce polynôme et conduit à :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \quad P'(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!}\, P'^{(k)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!}\, P^{(k+1)}(a)$$

Intégrons cette relation entre a et un réel x quelconque :

$$\int_a^x P'(t)\, dt = \int_a^x \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!}\, P^{(k+1)}(a) \right) dt$$

$$[P'(t)]_a^x = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^{k+1}}{(k+1)!}\, P^{(k+1)}(a) \right]_a^x$$

$$P(x) - P(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!}\, P^{(k+1)}(a)$$

Et, après changement d'indice $k \to k-1$ dans le signe somme

$$P(x) = P(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!}\, P^{(k)}(a)$$

Finalement, en intégrant $P(a)$ dans la somme :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!}\, P^{(k)}(a)$$

Donc $Q(n+1)$ est vraie, ce qui achève la preuve