

Exercice sur les suites récurrentes et les équations différentielles du 1^{er} ordre

1) Déterminer la suite définie par

$$\begin{cases} U_{n+1} = 2 U_n + 1 \\ U_0 = 1 \end{cases}$$

puis celle définie par

$$\begin{cases} U_{n+1} = 2 U_n + n + 1 \\ U_0 = 1 \end{cases}$$

2) a étant un nombre réel, déterminer la suite définie par :

$$\begin{cases} U_{n+1} = a U_n + n^2 + 1 \\ U_0 = 1 \end{cases}$$

3) De façon plus générale, on considère la suite définie par

$$\begin{cases} U_{n+1} = a U_n + Q_m(n) \\ U_0 = 1 \end{cases} \quad (E)$$

où $Q_m(X)$ est un polynôme de degré m à coefficients réels.

- a) Montrer, dans le cas où $a \neq 1$ que l'équation de récurrence (E) vérifiée par cette suite admet une solution particulière sous forme d'un polynôme de degré m à coefficients réels.
- b) En notant $P(X)$ le polynôme précédent, donner l'expression de U_n en fonction de $n, a, P(n)$
- c) Dans le cas où $a = 1$, y-a-t-il un polynôme solution de (E) ?

4) En s'aidant du 3) donner, pour a et k réels non nuls, la forme générale d'une suite définie par une relation de récurrence de la forme

$$U_{n+1} = a U_n + Q_m(n) e^{kn} \quad (E)$$

Correction :

- 1) On cherche d'abord une suite particulière solution de la relation de récurrence et on la cherche sous forme constante, soit : $U_n^{part} = C$. Cette constante est alors telle que :

$$C = 2 C + 1$$

Soit :

$$C = -1$$

La suite (U_n) satisfait alors la relation de récurrence initiale si et seulement si elle satisfait la nouvelle relation :

$$U_{n+1} - U_n^{part} = 2 U_n + 1 - (2 U_n^{part} + 1)$$

Soit :

$$U_{n+1} + 1 = 2 (U_n + 1)$$

La suite de terme général $V_n = U_n + 1$ vérifie donc :

$$V_{n+1} = 2 V_n$$

Elle est donc géométrique de raison 2 et a donc pour expression explicite :

$$V_n = V_0 \times 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

Ainsi :

$U_n = -1 + 2^{n+1}$

Remarque : Il y a une analogie de traitement avec les équations différentielles du premier ordre à coefficient constant. La solution générale de la relation de récurrence est la somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de la relation de récurrence sans le second membre (ici la constante 1).

Le second cas diffère du précédent par la recherche d'une solution particulière sous forme d'un polynôme de degré 1 en n soit : $U_n^{part} = a n + b$, a et b étant définis par la relation de récurrence ;

$$a (n + 1) + b = 2 (a n + b) + n + 1$$

Laquelle par identification conduit à :

$$\begin{cases} a = 2 a + 1 \\ a + b = 2 b + 1 \end{cases}$$

qui donne

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Ainsi :

$$U_n = -n - 2 + c 2^n$$

La constante c étant obtenu par la condition initiale :

$$U_0 = -2 + c = 1$$

qui donne :

$$c = 3$$

D'où :

$U_n = -n - 2 + 3 \times 2^n$

2) Traitons d'abord le cas $a \neq 1$ comme précédemment en cherchant une solution particulière de la forme $U_n^{part} = d n^2 + b n + c$, les coefficients vérifiant :

$$d (n + 1)^2 + b (n + 1) + c = a (d n^2 + b n + c) + n^2 + 1$$

Soit :

$$d (n^2 + 2 n + 1) + b (n + 1) + c = a (d n^2 + b n + c) + n^2 + 1$$

Et par identification :

$$\begin{cases} d = a d + 1 \\ 2 d + b = a b \\ d + b + c = a c + 1 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} d = \frac{1}{1-a} \\ b = \frac{-2}{(1-a)^2} \\ c = \frac{1}{1-a} \left(1 + \frac{2}{(1-a)^2} - \frac{1}{1-a} \right) = \frac{(1-a)^2 + 2 - (1-a)}{(1-a)^3} = \frac{a^2 - a + 2}{(1-a)^3} \end{cases}$$

Et :

$$U_n = \frac{1}{1-a} n^2 - \frac{2}{(1-a)^2} n + \frac{a^2 - a + 2}{(1-a)^3} + f 2^n$$

La constante f s'obtenant par la condition initiale

Traitons le cas $a = 1$. Dans ce cas on cherche une solution particulière de la forme $U_n^{part} = f n^3 + b n^2 + c n + d$ car on vérifie aisément qu'un second degré ne conviendrait pas. On aboutit à la relation :

$$f (n + 1)^3 + b (n + 1)^2 + c (n + 1) + d = f n^3 + b n^2 + c n + d + n^2 + 1$$

L'identification conduit au système :

$$\begin{cases} f = f \\ 3 f + b = b + 1 \\ 3 f + 2 b + c = c \\ f + b + c + d = d + 1 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} f = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} \end{cases}$$

Ainsi :

$$U_n^{part} = \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{2} n^2 + \frac{7}{6} n$$

Et :

$$U_n = \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{2} n^2 + \frac{7}{6} n + g$$

La constante g étant définie par la condition initiale :

$$U_0 = g = 1$$

Remarque : une autre méthode consiste à noter que :

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (U_{k+1} - U_k) + U_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (k^2 + 1) + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + n + 1 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n + 1 \\ &= \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} + n + 1 = \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{2} n^2 + \frac{7}{6} n + 1 \end{aligned}$$

On retrouve bien le même résultat.

3) Cas général :

a) On cherche $U_n^{part} = a_m n^m + \dots + a_1 n + a_0$

Le problème d'identification ramène à l'existence d'un polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_m X^m$ tel que :

$$P(X+1) = a P(X) + Q(X)$$

Soit :

$$a_0 + a_1 (X + 1) + \cdots + a_m (X + 1)^m = a (a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m) + q_0 + q_1 X + \cdots + q_m X^m$$

D'une façon un peu rapide, on peut constater que ce système aux inconnues $a_0, a_1, \dots, a_m$ prend une forme triangulaire supérieure :

$$\begin{cases} (1-a) a_0 + \cdots & = q_0 \\ (1-a) a_1 + & = q_1 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ (1-a) a_m & = q_m \end{cases}$$

Mais pour plus de rigueur, on peut le détailler en utilisant les notations sigma :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m a_k (X + 1)^k &= a \sum_{k=0}^m a_k X^k + \sum_{k=0}^m q_k X^k \\ \sum_{k=0}^m a_k \sum_{q=0}^k \binom{k}{q} X^q &= \sum_{k=0}^m a a_k X^k + \sum_{k=0}^m q_k X^k \\ \sum_{k=0}^m \sum_{q=0}^k \left(a_k \binom{k}{q} X^q \right) &= \sum_{k=0}^m (a a_k + q_k) X^k \end{aligned}$$

Si on représente dans un tableau comme celui-ci, les termes de la double somme de gauche (en gris sur le tableau),

k\q	0	1	q	k		m
0						
q						
k			$a_k \binom{k}{q} X^q$			
m						

on note que la somme peut être effectuée non pas en lignes sous diagonales mais en colonnes sur diagonales et elle devient :

$$\sum_{q=0}^m \sum_{k=q}^m \left(a_k \binom{k}{q} X^q \right) = \sum_{k=0}^m (a a_k + q_k) X^k$$

Soit :

$$\sum_{q=0}^m \left(\sum_{k=q}^m \left(a_k \binom{k}{q} \right) \right) X^q = \sum_{q=0}^m (a a_q + q_q) X^q$$

L'identification des coefficients donne alors :

$$\forall q \in \llbracket 0, m \rrbracket : \sum_{k=q}^m \left(a_k \binom{k}{q} \right) = a a_q + q_q$$

Soit encore en isolant le terme de plus haut degré dans chaque somme :

$$\forall q \in \llbracket 0, m \rrbracket : (1 - a) a_q + \sum_{k=q+1}^m \left(a_k \binom{k}{q} \right) = q_q$$

Le système apparaît alors clairement comme étant triangulaire supérieur avec des termes diagonaux étant tous égaux à $1 - a$ donc non nuls. Il possède donc une solution unique.

b) La solution générale de la relation de récurrence s'en déduit :

$U_n = P(n) + c a^n$

où c est une constante réelle arbitraire

c) On cherche dans ce cas $U_n^{part} = a_{m+1} n^{m+1} + \dots + a_1 n + a_0$

Une démarche analogue à celle du b) conduit à montrer l'existence d'une telle solution

4) On procède à un changement de suite en posant $U_n = V_n e^{k n}$ où la suite (V_n) suit la relation de récurrence :

$$V_{n+1} e^{k(n+1)} = a V_n e^{k n} + Q_m(n) e^{k n}$$

Soit :

$$V_{n+1} e^k = a V_n + Q_m(n)$$

Finalement :

$$V_{n+1} = e^{-k} a V_n + e^{-k} Q_m(n)$$

On est alors ramené au cas précédemment traité. Par exemple, si $a \neq e^k$,

$$V_n = P_m(n) + c \left(e^{-k} a \right)^n$$

Où c est une constante réelle arbitraire et $P_m(X)$ un polynôme de degré m

Ainsi :

$U_n = P_m(n) e^{k n} + c a^n$
