Enoncé :

1) **Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la suite $(e_{n+1}-e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers une limite finie h. Montrer que :**

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e_n}{n}=h$$

Remarque : Si $h\neq 0$ cela se traduit par $e_n \sim n\,h$. C'est le lemme de l'escalier. e_n désignant la hauteur d'un escalier à hauteur de marche variable, $e_{n+1}-e_n$ la hauteur de la $n+1$ ième marche, le théorème indique que si la hauteur de marche tend vers une valeur h, alors la hauteur de l'escalier est équivalente à celle d'un escalier à hauteur de marche constante égale à h

2) **Application : règle $U_{n+1}{}^{\alpha}-U_n{}^{\alpha}$**
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs tels que la suite $U_{n+1}{}^{\alpha}-U_n{}^{\alpha}$ converge vers un nombre réel $L>0$. Montrer que :

$$U_n \sim (L\,n)^{\frac{1}{\alpha}}$$

3) **Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_0=1$ et la relation de récurrence :**

$$U_{n+1}=U_n+\frac{1}{2\,U_n}$$

Montrer que :

$$U_n \sim \sqrt{n}$$

Solution :

1) Posons pour tout entier naturel n :

$$U_n=e_{n+1}-e_n$$

Le théorème de Césaro donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{U_1+U_2+\cdots+U_n}{n}=h$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e_n-e_0}{n}=h$$

Soit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e_n}{n}=h$$

2) D’après 1) :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{{U_n}^{\alpha}}{n} = L$$

Donc :

$${U_n}^{\alpha} \sim n\,L$$

D’où :

$$U_n \sim (n\,L)^{\frac{1}{\alpha}}$$

3) On montrer trivialement par récurrence que la suite est définie et à termes strictement positifs. Ainsi, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2\,U_n} > 0$$

Donc la suite est strictement croissante. Elle tend donc soit vers $+\infty$, soit vers une limite finie $L > 0$. Supposons par l’absurde que ce soit le second cas, alors, on aurait, par passage à la limite dans la relation précédente :

$$L - L = \frac{1}{2\,L}$$

Ce qui est absurde. Donc la suite tend vers $+\infty$.

De plus on a :

$${U_{n+1}}^2 - {U_n}^2 = (U_{n+1} - U_n)(U_{n+1} + U_n) = \frac{1}{2\,U_n}\left(2\,U_n + \frac{1}{2\,U_n}\right) = 1 + \frac{1}{4\,{U_n}^2}$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} {U_{n+1}}^2 - {U_n}^2 = 1$$

D’après 2) on en déduit :

$$U_n \sim n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$$