<u>Enoncé</u> :

1) **Soit $(\boldsymbol{U_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée ayant une seule valeur d'adhérence $\boldsymbol{a}$. Montrer que cette suite converge vers $\boldsymbol{a}$. Montrer par un exemple que ce n'est pas nécessairement le cas si la suite n'est pas bornée**
2) **Application :**
   Soit $(\boldsymbol{U_n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que la suite $(2\,\boldsymbol{U_n} + \boldsymbol{U_{2\,n}})_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0. Montrer que la suite $\boldsymbol{U_n}$ tend vers 0.

<u>Solution</u> :

1) Supposons par l'absurde que U_n ne converge pas vers a. Alors :

$$\exists\ \varepsilon_1 > 0 :\ \forall\, n\ \in \mathbb{N} :\ \exists\, n_1\ \in \mathbb{N} :\ n_1 > n\ et\ |U_n - a| \geq \varepsilon_1$$

Construisons alors par récurrence une suite extraite de la façon suivante :

Pour $n = 0$ on définit $\varphi(0)$ comme le premier entier naturel tel que $\left|U_{\varphi(0)} - a\right| \geq \varepsilon_1$

Pour $n = \varphi(0)$ on définit $\varphi(1)$ comme le premier entier naturel tel que :

$$\varphi(1) > \varphi(0) \text{ et } \left|U_{\varphi(1)} - a\right| \geq \varepsilon_1$$

Supposant avoir défini $\varphi(0) < \varphi(1) <\ldots< \varphi(p)$ tels que : $\forall\ k \in [\![0;p]\!] : \left|U_{\varphi(k)} - a\right| \geq \varepsilon_1$

on définit pour $n = \varphi(p)$, $\varphi(p+1)$ comme étant le premier entier naturel tel que :

$$\varphi(p+1) > \varphi(\mathrm{p}) \text{ et } \left|U_{\varphi(p+1)} - a\right| \geq \varepsilon_1$$

La suite $\left(U_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite extraite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et elle est bornée. Elle admet donc une valeur d'adhérence b. Il existe donc une suite extraite de cette suite $\left(U_{\varphi(\psi(n))}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers b. Or cette dernière vérifie :

$$\left|U_{\varphi(\psi(n))} - a\right| \geq \varepsilon_1$$

Donc par passage à la limite :

$$|b - a| \geq \varepsilon_1$$

b est alors une valeur d'adhérence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est distincte de a. Ceci contredit l'hypothèse de départ. Donc U_n converge vers a

<u>Contre-exemple si U_n n'est pas bornée</u> : $U_n = 0$ si n pair et $U_n = n$ si n impair. Cette suite n'admet que 0 pour valeur d'adhérence et ne converge pas.

2) U_n étant bornée, elle possède au moins une valeur d'adhérence a. Nous allons montrer que a est nulle.

Soit $U_{\varphi(n)}$ une suite extraite de U_n tendant vers a. Alors, la suite $2\,U_{\varphi(n)} + U_{2\,\varphi(n)}$ tendant vers 0, nous en déduisons que la suite $U_{2\,\varphi(n)}$ tend vers $-2\,a$.

Puis, la suite $2\,U_{2\,\varphi(n)} + U_{2^2\varphi(n)}$ tendant vers 0, la suite $U_{2^2\varphi(n)}$ tend vers $(-2)^2\,a$.

Et ainsi de suite par récurrence, la suite $U_{2^k\varphi(n)}$ tend vers $(-2)^k\,a$ pour tout entier naturel k

La suite U_n étant bornée, l'ensemble de ses valeurs d'adhérence l'est aussi. Donc $a = 0$.

Par conséquent la suite U_n est bornée et admet seulement 0 pour valeur d'adhérence.
D'après le 1) elle converge vers 0.