

Enoncé :

- 1) Soit (U_n) une suite de réels monotone dont une sous suite admet une limite finie ou infinie L . Montrer que la suite (U_n) tend vers L
- 2) Soit (U_n) une suite de réels telle que les sous suites $(U_{2n}), (U_{2n+1}), (U_{3n})$ convergent. Montrer que (U_n) converge
- 3) Construire une suite de réels (U_n) telle que pour tous les entiers naturels $k \geq 2$ les sous suites $(U_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite finie L mais que la suite (U_n) ne converge pas

Correction :

- 1) Notons $(U_{\varphi(n)})$ la sous suite également monotone (nous la supposons croissante) convergeant vers L . Soit $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < U_{\varphi(n)} \leq L$$

Posons :

$$n_1 = \varphi(n_0) \geq n_0$$

Alors pour tout $n > n_1$:

$$\exists n_2 > n_1 : \varphi(n_2) > n > \varphi(n_1)$$

Donc :

$$L - \varepsilon \leq U_{\varphi(n_1)} \leq U_n \leq U_{\varphi(n_2)} \leq L$$

Et la suite (U_n) tend donc vers L

- 2) Posons :

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n}$$

$$L' = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n+1}$$

$$L'' = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{3n}$$

Alors, la suite $(U_{3(2n)})$ étant extraite de la suite (U_{2n}) tend vers L , mais elle est également la suite $(U_{2(3n)})$ qui est extraite de la suite (U_{3n}) donc :

$$L = L''$$

De même, la suite $(U_{3(2n+1)})$ étant extraite de la suite (U_{3n}) tend vers L'' , mais elle est également la suite $(U_{2(3n+1)+1})$ qui est extraite de la suite (U_{2n+1}) donc :

$$L' = L''$$

Ainsi les suites (U_{2n}) , (U_{2n+1}) ont même limite L donc la suite (U_n) tend vers L

3) Définissons les termes d'une suite par : $U_n = 1$, si n est premier, 0 sinon.

Alors :

1^{er} cas : pour k premier : $U_k = 1$ et pour tout $n > 1$: $U_{kn} = 0$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{kn} = 0$$

2ème cas : pour k non premier : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{kn} = 0$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{kn} = 0$$

Pour autant (U_n) ne converge pas car elle possède 2 valeurs d'adhérence 0 et 1.



