Etudier la suite définie par la relation de récurrence :

$$\boldsymbol{u_{n+1} = (1 - u_n)^2}$$

et de premier terme :

$$\boldsymbol{u_0 = \frac{1}{2}}$$

Solution :

On introduit la fonction :

$$f(x) = (1 - x)^2$$

et on cherche les points fixes de f ou encore limites éventuelles de la suite en résolvant :

$$f(x) = x$$

Soit :

$$(1 - x)^2 = x$$

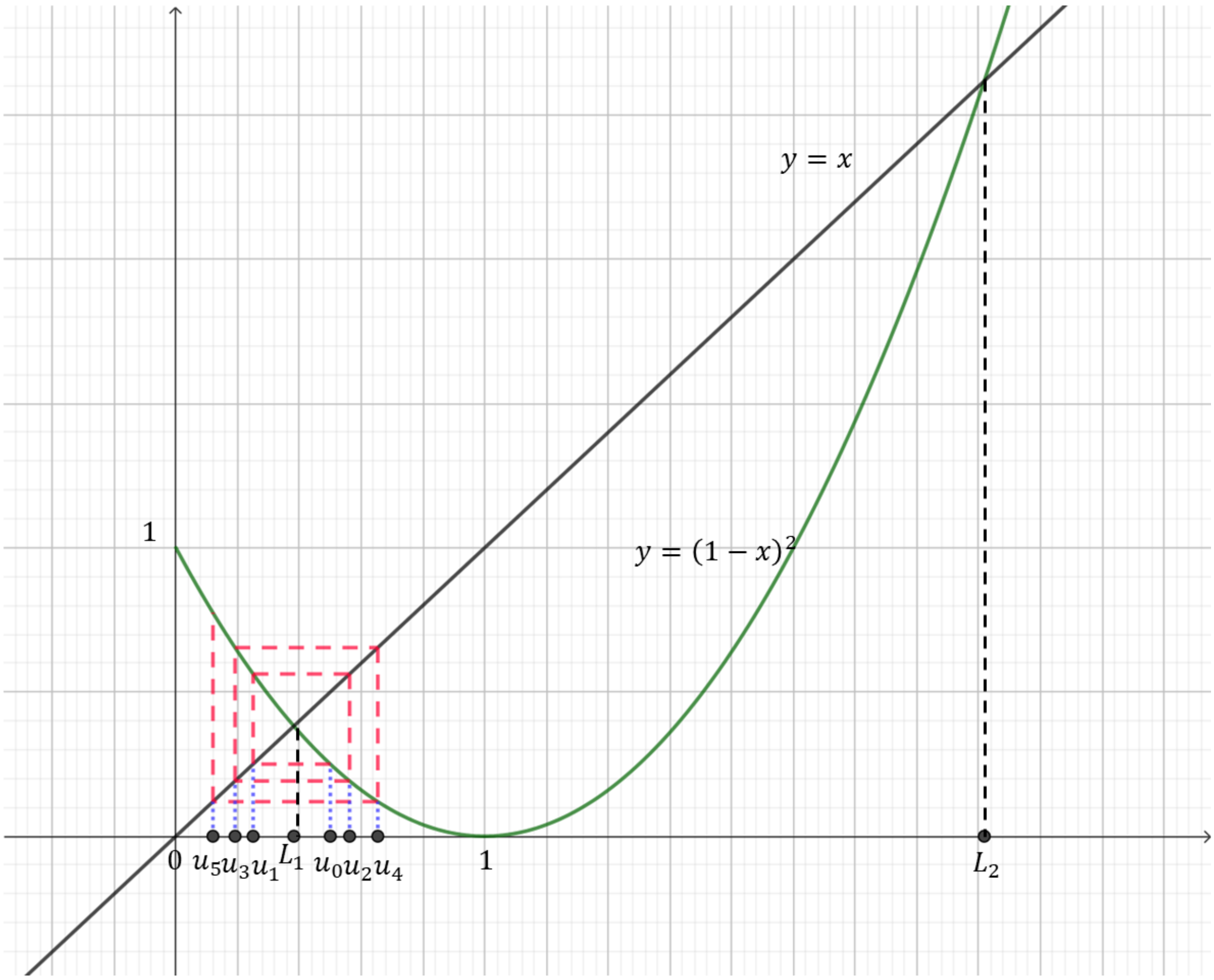
$$1 - 2\,x + x^2 = x$$

$$x^2 - 3\,x + 1 = 0$$

On obtient deux limites éventuelles :

$$\boxed{\boldsymbol{0 < L_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1}, \qquad \boldsymbol{L_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1}}$$

On représente graphiquement la fonction ainsi que la droite $y = x$ afin de faire apparaitre par une construction en pointillés les premiers termes de la suite.



Ce procédé suggère que les termes de rang pair converge vers 1 et ceux de rang impair vers 0. Pour le prouver, on introduit les deux suites suivantes :

$$v_n = u_{2\,n}$$

$$w_n = u_{2\,n+1}$$

On procède alors par récurrence pour montrer que la propriété suivante P_n est vraie pour tout entier naturel n :

$$\boxed{\boldsymbol{L_1 < v_n < v_{n+1} < 1, \quad 0 < w_{n+1} < w_n < L_1}}$$

Pour cela, on note au préalable que :

$$v_{n+1} = u_{2\,n+2} = f(u_{2\,n+1}) = f\big(f(u_{2\,n})\big) = f\big(f(v_n)\big)$$

De même :

$$w_{n+1} = f\big(f(w_n)\big)$$

et on étudie en premier la fonction g définie par :

$$g(x) = f\big(f(x)\big) = (1-(1-x)^2)^2 = (2\,x - x^2)^2 = 4\,x^2 - 4\,x^3 + x^4$$

$$g'(x) = 8\,x - 12\,x^2 + 4\,x^3 \;= 4\,x\,(2 - 3\,x + x^2) = 4\,x\,(x-1)\,(x-2)$$

g' étant strictement positive sur $]0{,}1[$, g est strictement croissante sur $[0{,}1]$

On peut alors procéder à la récurrence :

<u>Initialisation</u> : pour $n = 0$:

$$v_0 = u_0 = \frac{1}{2}, \qquad w_0 = u_1 = \frac{1}{4}$$

$$v_1 = u_2 = \frac{9}{16}, \qquad w_1 = u_3 = \frac{49}{256}$$

On vérifie aisément :

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2} < \frac{9}{16} < 1, \qquad 0 < \frac{49}{256} < \frac{1}{4} < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Donc P_0 est vraie.

<u>Hérédité</u> : On suppose que P_n est vraie pour un entier naturel n. Alors :

$$L_1 < v_n < v_{n+1} < 1, \quad 0 < w_{n+1} < w_n < L_1$$

Donc :

$$f(f(L_1)) < f(f(v_n)) < f(f(v_{n+1})) < f\big(f(1)\big), \quad f(f(0)) < f(f(w_{n+1})) < f(f(w_n)) < f(f(L_1))$$

D'où :

$$L_1 < v_{n+1} < v_{n+2} < 1, \quad 0 < w_{n+2} < w_{n+1} < L_1$$

Ainsi P_{n+1} est vraie, ce qui prouve la propriété P_n pour tout entier naturel n.

On en déduit alors que la suite (v_n) est décroissante et minorée donc converge vers une limite L et la suite (w_n) est croissante et majorée donc converge vers une limite L', ces deux limites étant solutions de l'équation :

$$f\big(f(x)\big) = x$$

Soit :

$$4\,x^2 - 4\,x^3 + x^4 = x$$

$$x^4 - 4\,x^3 + 4\,x^2 - x = 0$$

$$x\,(x^3 - 4\,x^2 + 4\,x - 1) = 0$$

$$x\,(x-1)\,(x^2 - 3\,x + 1)$$

Donc L et L' sont dans l'ensemble :

$$\{0, 1, L_1, L_2\}$$

Or, par ailleurs, pour tout entier naturel n :

$$L_1 < v_0 \leq v_n < 1, \quad 0 < w_n \leq w_0 < L_1$$

Donc par passage à la limite :

$$L_1 < v_0 \leq L \leq 1, \quad 0 \leq L' \leq w_0 < L_1$$

On en déduit :

$$L = 1, \qquad L' = 0$$

Ainsi , la suite des termes de rang pair est bien strictement croissante et tend vers 1 tandis que celle des rang impair est strictement décroissante et tend vers 0.