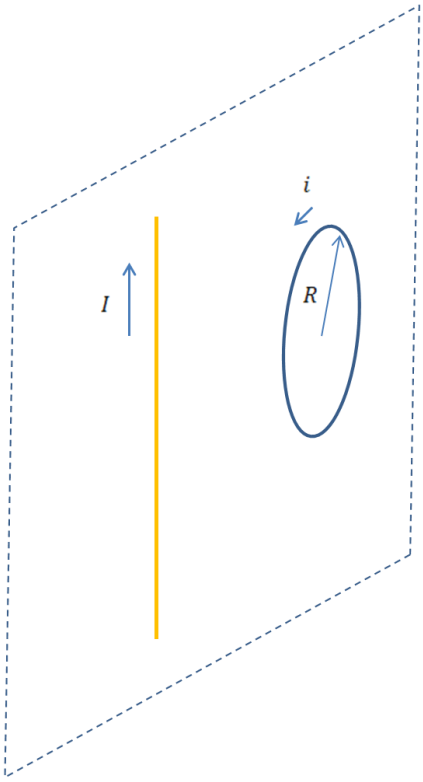
Force agissant sur un conducteur circulaire

On place selon le schéma indiqué un conducteur filiforme circulaire parcouru par un courant d'intensité i dans le champ créé par un conducteur rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité I.



On admet que le champ magnétique créé par un fil infini a une intensité donnée en un point situé à une distance r du fil par :

$$B(r) = \frac{\mu_0 \, I}{2 \, \pi \, r}$$

Le but de l'exercice est d'évaluer la force d'interaction entre le fil infini et le conducteur circulaire

<u>Questions</u> :

1) Paramétrer convenablement la position d'un point sur le cercle de rayon R
2) En considérant un petit élément de cercle, montrer que ce dernier est soumis à une force de Laplace dirigée vers le centre du cercle

3) En utilisant les symétries, prédire la direction et le sens de la force résultante exercée par le fil sur le cercle ?
4) Par intégration, évaluer cette résultante

<u>Conseil</u> : Pour un calcul intégral d'une fonction rationnelle en $cos(\theta)$ et $sin(\theta)$ on peut se ramener à une intégrale de fonction rationnelle par le changement de variables :

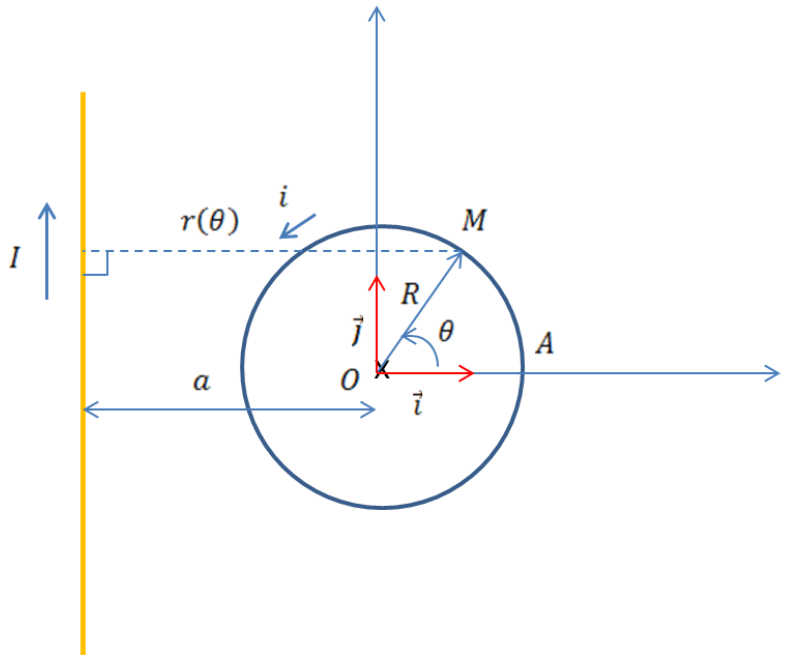
$$t = tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Sachant qu'on a alors :

$$cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad sin(\theta) = \frac{2\,t}{1 + t^2}$$

5) On suppose que le cercle peut pivoter librement autour de son diamètre parallèle à l'axe du fil. Prouver que le cercle est en équilibre, c'est-à-dire qu'aucun couple ne s'exerce sur lui.
6) On fait tourner le cercle autour de l'axe précédent d'un angle α non nul. Prouver qualitativement que le cercle n'est pas en équilibre et qu'il va pivoter.
7) Combien y a-t-il de positions d'équilibre pour le cercle fixé à l'axe de rotation précédent. Qu'est ce qui distingue ces positions d'équilibre ?

Solutions



1) On paramètre un point du cercle par l'angle $= \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$, O étant le centre du cercle et $\vec{\imath}$ le vecteur unitaire orthogonal au fil et colinéaire et de même sens que le vecteur $\overrightarrow{OA} = R\,\vec{\imath}$, A étant le point du cercle le plus éloigné du fil
2) Soit un petit élément de fil de longueur $R\ d\theta$ pris autour d'un point M de paramètre θ. Notant $\vec{T}$ le vecteur unitaire tangent de même sens que le courant i, la portion de conducteur est soumise à une force de Laplace définie par :

$$\overrightarrow{dF} = \ i\,R\,d\theta\,\vec{T} \wedge \vec{B}$$

La règle des doigts de la main droite montre alors que $\overrightarrow{dF}$ est dirigée vers le centre du cercle. Plus précisément, en notant $\vec{u}$ le vecteur unitaire colinéaire de même sens à $\overrightarrow{OM}$ on a :

$$\overrightarrow{dF} = -\,i\,R\,d\theta\,B(\theta)\,\vec{u} = -\,i\,R\,d\theta\,\frac{\mu_0\,I}{2\,\pi\,r(\theta)}\vec{u}$$

où $r(\theta)$ est la distance de M au fil, soit :

$$r(\theta) = a + R\,cos(\theta)$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{dF} = \frac{\mu_0\,I\,i\,R\,d\theta}{2\,\pi\,\left(a + R\,cos(\theta)\right)}\vec{u} = \frac{\mu_0\,I\,i\ \ d\theta}{2\,\pi\,\left(\frac{a}{R} + cos(\theta)\right)}\vec{u}$$

Posons :

$$b = \frac{a}{R} > 1$$

alors :

$$\boxed{\overrightarrow{dF} = \frac{\mu_0\, I\, i}{2\,\pi} \frac{d\theta}{b + cos(\theta)} \vec{u}}$$

3) En prenant deux portions symétriques par rapport à $(O, \vec{\imath})$ de conducteur, la somme des deux contributions donne une composante selon $\vec{\imath}$. La résultante $\vec{F}$ est donc selon $\vec{\imath}$. De plus, en prenant deux portions de conducteur symétriques par rapport à l'axe $(O, \vec{\jmath})$ on constate que la composante selon $\vec{\imath}$ de la somme de leurs actions est positive. On en déduit que $\vec{F}$ est de la forme :

$$\vec{F} = F\,\vec{\imath}\,, \;\; F > 0$$

4) Le calcul de F se fait en intégrant les contributions élémentaires pour θ allant de $-\pi$ à π ce qui donne :

$$F = \int_{-\pi}^{\pi} \overrightarrow{dF} \cdot \vec{\imath} = \frac{\mu_0\, I\, i}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{cos(\theta)\, d\theta}{b + cos(\theta)}$$

Intéressons nous à :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{cos(\theta)\, d\theta}{b + cos(\theta)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(b + cos(\theta) - b)\, d\theta}{b + cos(\theta)}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{b}{b + cos(\theta)}\right) d\theta = 2\,\pi - b \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{b + cos(\theta)}\, d\theta$$

Faisons le changement de variable :

$$t = tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Soit :

$$dt = \frac{1}{2}\left(1 + tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) d\theta$$

d'où :

$$d\theta = \frac{2\, dt}{1 + t^2}$$

Et sachant :

$$cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

on en déduit :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{b + cos(\theta)}\, d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{b + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \frac{2\, dt}{1 + t^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\, dt}{b(1 + t^2) + 1 - t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\, dt}{b + 1 + (b - 1)\, t^2}$$

$$= \frac{2}{(b - 1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\frac{b + 1}{b - 1} + t^2} = \frac{2}{(b - 1)} \left[\sqrt{\frac{b - 1}{b + 1}}\, tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{b - 1}{b + 1}}\, t \right) \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{b^2 - 1}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2\, \pi}{\sqrt{b^2 - 1}}$$

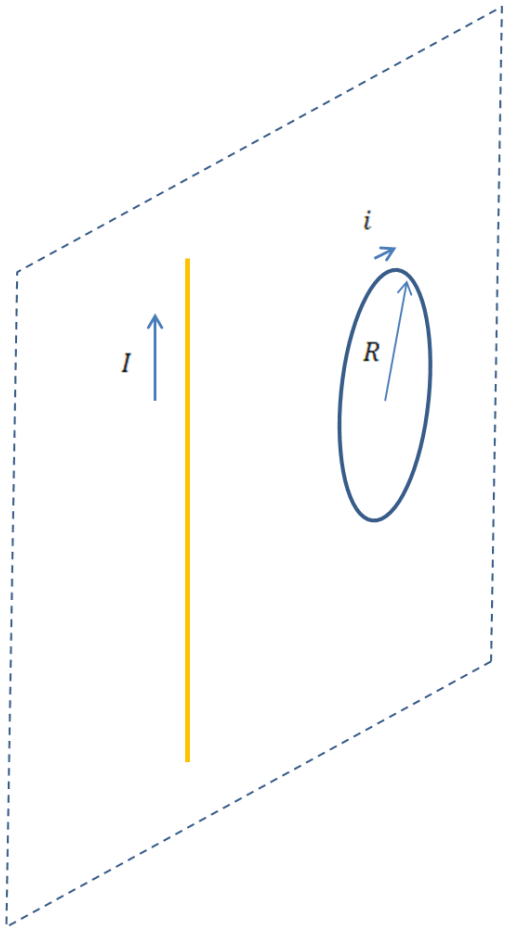
Ainsi :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{cos(\theta)\, d\theta}{b + cos(\theta)} = 2\, \pi - \frac{2\, \pi\, b}{\sqrt{b^2 - 1}} = 2\, \pi \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - R^2}} \right)$$

Et :

$$\boxed{F = \mu_0\, I\, i \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - R^2}} \right)}$$

5) Les forces exercées par chaque portion de conducteur pointant vers le centre du cercle, leur moment est nul en ce point
6) On observe que chaque portion de cercle soumise à une force de Laplace exerce un moment de même signe non nul
7) Il y a deux positions d'équilibre, une position d'équilibre stable et une position d'équilibre instable (le système ne pourra donc se retrouver dans cette dernière car la moindre perturbation de l'environnement le ramènera à la position d'équilibre stable).
8) La position étudiée précédemment était instable, la position stable étant la suivante


i
I
R