Exercice 1 <u>**Calcul de potentiel électrostatique et de tension**</u>

On considère, dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le champ de vecteur :

$$\vec{E} = (x^3 + 3\,x\,y^2)\,\vec{\imath} + (3\,x^2\,y + \,y^3)\,\vec{\jmath}$$

1) Vérifier que ce champ dérive bien d'un potentiel $V(x, y, z)$
2) Déterminer ce potentiel (à une constante près)
3) Calculer la tension U_{AB} entre les points $A(1,1,1)$ et $B(2,3,4)$
4) Une masse ponctuelle $m = 100\ g$ portant une charge de $0{,}1\ C$ étant initialement immobile en A est mise en mouvement de telle sorte que seule la force électrostatique travaille. Calculer le travail de cette force entre A et B puis en déduire la vitesse de l'électron en B en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

Exercice 2

On reprend, dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le champ de vecteur de l'exercice 1

$$\vec{E} = (x^3 + 3\,x\,y^2)\,\vec{\imath} + (3\,x^2\,y + \,y^3)\,\vec{\jmath}$$

1) Calculer la divergence de ce champ (1 pt) . On rappelle :

$$div\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

2) En déduire la densité volumique de charges $\rho(x, y, z)$ en tout point de l'espace
3) On considère le cube défini par :

$$\mathcal{C} = \{M(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$$

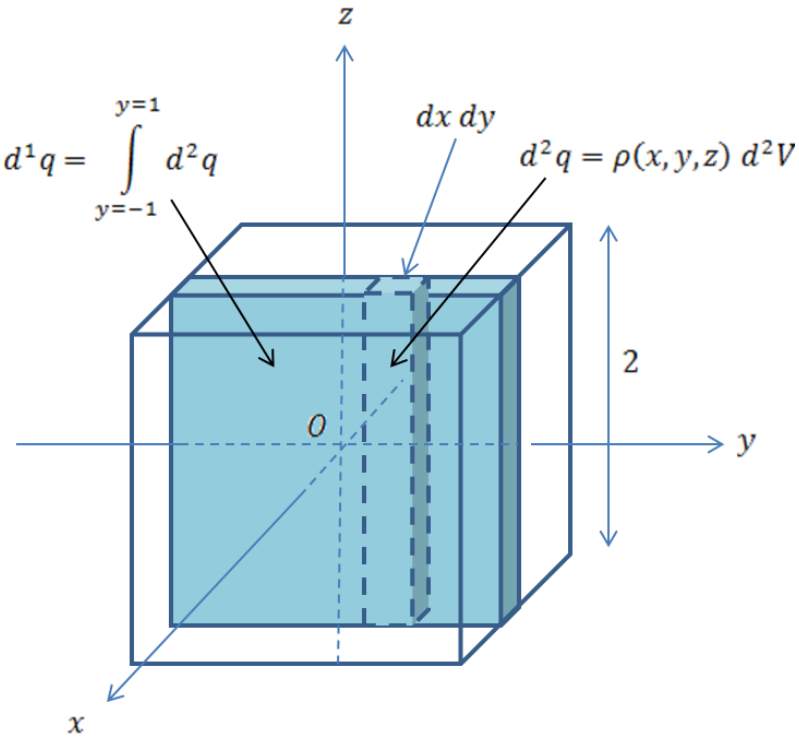
   a) On découpe (voir annexe qui suit) le cube en parallélépipèdes élémentaires de hauteur 2 et de volume :

   $$d^2V = 2\,dx\,dy$$

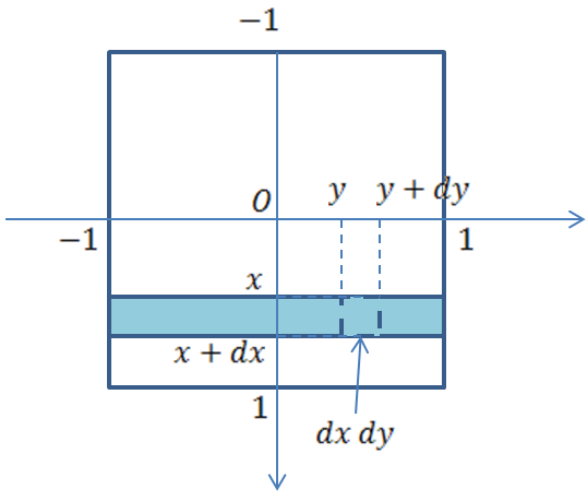
   Calculer la charge élémentaire d^2q contenue dans ce volume
   b) En déduire par calcul intégral la charge d^1q contenue entre des plans d'abscisses x et $x + dx$

En déduire la charge q contenue dans le cube puis le flux sortant du champ électrostatique à travers la surface du cube.

Annexe à l'exercice 2:



Vue en perspective du cube



Vue de dessus

<u>Correction</u>

Exercice 1

1) Posons :

$$E_x = x^3 + 3\,x\,y^2, E_y = 3\,x^2\,y + \,y^3, E_z = 0$$

On a :

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = 6\,x = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = 0 = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 = \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

Les dérivées croisées sont égales donc le champ dérive d'un potentiel

2) On a :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -E_x = -x^3 - 3\,x\,y^2$$

Donc :

$$V = -\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}\,x^2\,y^2 + c(x,y)$$

Et :

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -3\,x^2\,y + \frac{\partial c}{\partial y} = -3\,x^2\,y - \,y^3$$

Donc :

$$\frac{\partial c}{\partial y} = -\,y^3$$

Et :

$$c(x,y) = -\frac{y^4}{4} + k$$

D'où :

$$\boxed{V = -\frac{x^4}{4} - \frac{y^4}{4} - \frac{3}{2}\,x^2\,y^2 + k}$$

3) On a :

$$U_{AB} = V(A) - V(B) = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + k\right) - \left(-\frac{16}{4} - \frac{81}{4} - \frac{3}{2} \times 4 \times 9 + k\right)$$

$$= -2 + \frac{97}{4} + 54 = 52 + \frac{97}{4} = \frac{305}{4} = 76{,}25\,V$$

4) Le travail est :

$$W = q\,U_{AB} = 0{,}1 \times 76{,}25 = 7{,}625\,J$$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\frac{1}{2}m\,{v_B}^2 - \frac{1}{2}m\,{v_A}^2 = W$$

Soit :

$$v_B = \sqrt{\frac{2\,W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 7{,}625}{0{,}1}} \approx 12{,}3\,m\,s^{-1}$$

Exercice 2

1) On a :

$$div\,\vec{E} = 3\,x^2 + 3\,y^2 + 3\,x^2 + 3\,y^2 = 6\,x^2 + 6\,y^2$$

2) On a :

$$\rho(x,y,z) = \varepsilon_0\,div\,\vec{E} = \varepsilon_0\,(6\,x^2 + 6\,y^2)$$

3) a)

$$d^2q = \rho(x,y,z)\,d^2V = \varepsilon_0\,(12\,x^2 + 12\,y^2)\,dx\,dy$$

b)

$$d^1q = \int_{y=-1}^{y=1} d^2q = \varepsilon_0\,dx \int_{y=-1}^{y=1} (12\,x^2 + 12\,y^2)\,dy = \varepsilon_0\,dx\,[12\,x^2\,y + \ 4\,y^3\,+]_{-1}^{1}$$

$$= \varepsilon_0\,(24\,x^2 + 8)\,dx$$

c)

$$q = \int_{x=-1}^{x=1} d^1q = \varepsilon_0 \int_{x=-1}^{x=1} (24\,x^2 + 8)\,dx = \varepsilon_0\,[8\,x^3\ +\ 8\,x]_{-1}^{1} = 32\,\varepsilon_0\,C$$

c) Le flux sortant est :

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} = 32$$