<u>Exercice</u> : Séries télescopiques

Justifier la convergence et donner la somme de rang N et le case échéant, la somme de la série dont le terme général est le suivant :

$$\boldsymbol{a)\ \ U_n = \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}} \qquad \boldsymbol{b)\ U_n = Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \qquad \boldsymbol{c)\ \ U_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}$$

$$\boldsymbol{d)\ \ U_n = \frac{1}{n^2-1}} \qquad \boldsymbol{e)\ U_n = Ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} \qquad \boldsymbol{f)\ \ U_n = \frac{1}{n^3-n}}$$

<u>Solution</u>

a) Rappelons la formule :

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

donc :

$$U_n = \frac{2}{n\,(n+1)} \sim \frac{2}{n^2}$$

La série converge et :

$$\sum_{n=1}^{N} U_n = 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n\,(n+1)} = 2\sum_{n=1}^{N}\frac{(1+n)-n}{n\,(n+1)} = 2\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{N+1}\right)$$

Donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n = 2$$

b) On a :

$$U_n \sim \frac{1}{n}$$

donc la série diverge et :

$$U_n = Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = Ln(n+1) - Ln(n)$$

donc la série est téléscopique et :

$$\sum_{n=1}^{N} U_n = \sum_{n=1}^{N} (Ln(n+1) - Ln(n)) = Ln(2) - Ln(N)$$

c) On a :

$$U_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

donc la série diverge et :

$$U_n = \frac{1\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{n - (n+1)} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

donc la série est téléscopique et :

$$\sum_{n=1}^{N} U_n = \sum_{n=1}^{N} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \sqrt{N+1} - \sqrt{1} = \sqrt{N+1} - 1$$

d) On a :

$$U_n \sim \frac{1}{n^2}$$

donc la série converge et :

$$U_n = \frac{1}{(n-1)(n+1)}$$

$$\sum_{n=2}^{N} U_n = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n\,(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{2}{n\,(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{(2+n) - n}{n\,(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \left(\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}\right)\right)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}\right)$$

Donc :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} U_n = \frac{3}{4}$$

e) On a :

$$U_n \sim -\frac{1}{n^2}$$

donc la série converge et :

$$U_n = Ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = Ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n\,n}\right) = Ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - Ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

donc la série est téléscopique et :

$$\sum_{n=2}^{N} U_n = \sum_{n=2}^{N}\left(Ln\left(\frac{n-1}{n}\right) - Ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) = Ln\left(\frac{1}{2}\right) - Ln\left(\frac{N}{N+1}\right)$$

donc :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} U_n = -\ln(2)$$

f) On a :

$$U_n \sim \frac{1}{n^3}$$

donc la série converge et :

$$U_n = \frac{1}{n(n^2-1)} = \frac{1}{n(n-1)(n+1)}$$

et :

$$\sum_{n=2}^{N} U_n = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)(n+1)} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{(2+n)-n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N(N+1)}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\,N(N+1)}$$

donc :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} U_n = \frac{1}{4}$$