<u>Exercice 1 :</u> Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes et calculer leur somme sur $]-R, R[$

$$\mathbf{1)}\ \sum_{n\geq 1}(-1)^{1+2+\cdots+n}\, x^n \qquad \mathbf{2)}\ \sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{n!}\, x^{2\,n} \qquad \mathbf{3)}\ \sum_{n\geq 1}\frac{7^{(-1)^{n+1}}}{n}\, x^n$$

$$\mathbf{4)}\ \sum_{n\geq 1} a_n\, x^n\ ,\ a_n = \text{reste de la division euclidienne de } n \text{ par } 3$$

<u>Exercice 2 :</u> Calculer les sommes suivantes : (on pourra s'aider d'une série entière)

$$\mathbf{1)}\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{\pi^n} \qquad \mathbf{2)}\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n\,(n+1)(n+2)}$$

<u>Correction :</u>

<u>Exercice 1</u> :

1) Pour, le rayon, on applique la règle de D'Alembert :

Posons :

$$a_n = (-1)^{1+2+\cdots+n}$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$$

Donc :

$$R = \frac{1}{1} = 1$$

L'analyse des premiers termes de la suite a_n suggère qu'elle est périodique de période 4. En effet :

$$a_1 = (-1)^1 = -1$$

$$a_2 = (-1)^{1+2} = -1$$

$$a_3 = (-1)^{1+2+3} = 1$$

$$a_4 = (-1)^{1+2+3+4} = 1$$

$$a_4 = (-1)^{1+2+3+4} = -1, etc$$

Vérifions le, en effectuant la division euclidienne d'un entier n par 4 :

$$n = 4\,q + r, \qquad 0 \leq r \leq 3$$

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{(4\,q+r)\,(4\,q+r+1)}{2} = 2\,q\,(4\,q+r+1) + 2\,q\,r + \frac{r\,(r+1)}{2}$$

$$a_n = (-1)^{\frac{r\,(r+1)}{2}}$$

Donc :

$$a_{4\,q} = 1$$

$$a_{4\,q+1} = -1$$

$$a_{4\,q+2} = -1$$

$$a_{4\,q+3} = 1$$

Et on peut effectuer la somme en groupant les termes par termes consécutifs :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^n = \sum_{q=1}^{+\infty} a_{4q}\, x^{4\,q} + \sum_{q=0}^{+\infty} \left(a_{4q+1}\, x^{4\,q+1} + a_{4q+2}\, x^{4\,q+2} + a_{4q+3}\, x^{4\,q+3}\right)$$

$$= \sum_{q=1}^{+\infty} x^{4\,q} + \sum_{q=0}^{+\infty} (-\, x^{4\,q+1} -\, x^{4\,q+2} +\, x^{4\,q+3})$$

$$= -1 + \sum_{q=0}^{+\infty} (x^{4\,q} -\, x^{4\,q+1} -\, x^{4\,q+2} +\, x^{4\,q+3})$$

$$= -1 + \sum_{q=0}^{+\infty} x^{4\,q}\,(1 -\, x -\, x^2 +\, x^3) = -1 + (1 -\, x -\, x^2 +\, x^3) \sum_{q=0}^{+\infty} (x^4)^q$$

$$= -1 + (1 -\, x -\, x^2 +\, x^3)\, \frac{1}{1 - x^4} = \frac{x^4 - 1 + 1 -\, x -\, x^2 +\, x^3}{1 - x^4}$$

$$= \frac{x^4 -\, x^2 +\, x^3 - x}{(1 - x^2)\,(1 + x^2)} == \frac{x^2\,(x^2 - 1) +\, x\,(x^2 - 1)}{(1 - x^2)\,(1 + x^2)}$$

$$= -\frac{x^2 +\, x}{1 - x^2}$$

2) Posons là encore :

$$a_n = \frac{n^2}{n!}$$

Alors :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\,\frac{n!}{n^2} \sim \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0^+$$

Et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^n$ a pour rayon :

$$R = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Il en va donc de même pour la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^{2\,n}$

Calcul de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^{2\,n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)\,!}\,(x^2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)\,!}\,(x^2)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{(n-1)\,!}\,(x^2)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)\,!}\,(x^2)^n$$

$$= x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)\,!}\,(x^2)^{n-2} + x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)\,!}\,(x^2)^{n-1}$$

$$= x^4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,(x^2)^n + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,(x^2)^n$$

$$= (x^4 + x^2)\, e^{x^2}$$

3) La règle de D'alembert ne s'applique pas car en posant :

$$a_n = \frac{7^{(-1)^{n+1}}}{n}$$

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{2\,n+1}}{a_{2\,n}}\right| = 49$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{2\,n+2}}{a_{2\,n+1}}\right| = \frac{1}{49}$$

Donc la suite $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ n'a pas de limite. En revanche :

Si $|x| > 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{7^{(-1)^{2\,n+1}}}{2\,n}\, x^{2\,n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{2\,n}}{14\,n} = +\infty$$

La série diverge trivialement.

Si $|x| < 1$:

$$\left|\frac{7^{(-1)^{n+1}}}{n}\, x^n\right| \leq \frac{7\,|x|^n}{n} \leq 7\,|x|^n$$

La série est alors par comparaison absolument convergente.

On en déduit :

$$R = 1$$

Calcul de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, x^n = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{7^{(-1)^{2\,q+1}}}{2\,q}\, x^{2\,q} + \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{7^{(-1)^{2\,q+2}}}{2\,q+1}\, x^{2\,q+1}$$

$$= \frac{1}{14} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^q}{q} + 7 \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,q+1}}{2\,q+1}$$

$$= -\frac{1}{14}\, Ln(1-x^2) + \frac{7}{2}\, Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

4) Comme précédemment :

Si $|x| > 1$: la série diverge trivialement

Si $|x| < 1$:

$$|a_n\, x^n| \leq 2\, |x|^n$$

La série est alors par comparaison absolument convergente.

On en déduit :

$$R = 1$$

Calcul de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \sum_{q=0}^{+\infty} (0\, x^{3\,q} + 1\, x^{3\,q+1} + 2\, x^{3\,q+2}\,)$$

$$= \sum_{q=0}^{+\infty} x^{3\,q}\, (x + 2\, x^2\,) = (x + 2\, x^2\,) \sum_{q=0}^{+\infty} (x^3)^q = \frac{x + 2\, x^2}{1 - x^3}$$

<u>Exercice 2 :</u>

1) Introduisons la série :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\, x^n$$

De rayon de convergence égal à 1 et calculons sa somme :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(n-1+1)\, x^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(n-1)\, x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n\;\, x^n$$

$$= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1) x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} n\;\, x^{n-1}$$

$$= x^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)'' + x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)'$$

$$= x^2 \left(\frac{1}{1-x}\right)'' + x \left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$= x^2\, \frac{2}{(1-x)^3} + x\, \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{2\,x^2 + x\ \ (1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x^2+x}{(1-x)^3}$$

La somme cherchée est alors :

$$f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}}{\left(1-\frac{1}{\pi}\right)^3} = \frac{\pi\,(1+\pi)}{(\pi-1)^3}$$

2) Introduisons la série :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\,(n+2)}\ x^n$$

De rayon de convergence égal à 1 et calculons sa somme pour $x \neq 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\ x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\ x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+2}\ x^n$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\ x^{n+1} - \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+2}\ x^{n+2}$$

$$= \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\ x^n - \frac{1}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}\ x^n$$

$$= -\frac{1}{x}\ Ln(1-x) - \frac{1}{x^2}(-Ln(1-x)-x)$$

$$= \frac{(1-x)\ Ln(1-x)+x}{x^2}$$

La somme cherchée est alors :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\ Ln\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2 - 2\ Ln(2)$$