<u>Enoncé</u> :

Déterminer le rayon de convergence ainsi que la somme de la série sur un intervalle maximal dans chacun des cas suivants :

$$\boldsymbol{a)\ \sum cos(n\,\theta)\ x^n\,,\qquad b)\sum cos(n\,\theta)\ \frac{x^n}{n},\qquad c)\sum \frac{x^{3\,n}}{(3\,n)\,!},\qquad d)\sum \frac{x^n}{2\,n+1}}$$

<u>Réponse</u> :

a) On a :

$$|cos(n\,\theta)\ x^n| \leq |x|^n$$

Donc si $|x| < 1$ la série converge et donc $R \geq 1$.

Montrons que la série diverge en 1 en supposant par l'absurde que la suite de terme général $cos(n\,\theta)$ tende vers 0. Alors

<u>1er cas</u> : $sin(\,\theta) = 0$ soit $\theta = k\,\pi\,, k \in \mathbb{Z}$

alors $cos(n\,\theta) = (-1)^{n\,k}$ donc la suite de terme général $cos(n\,\theta)$ ne tend pas vers 0.

<u>2ème cas</u> : $sin(\,\theta) \neq 0$

Alors

$$cos\big((n+1\,)\theta\big) = cos(n\,\theta)\,cos(\,\theta) - sin(n\,\theta)\,sin(\,\theta)$$

La suite $cos\big((n+1\,)\theta\big)$ extraite de la suite $cos(n\,\theta)$ tendrait donc vers 0 et par conséquent, la suite $sin(n\,\theta)$ tendrait vers 0. Or on a également :

$$cos^2(n\,\theta) + sin^2(n\,\theta) = 1$$

Par passage à la limite, on aurait ainsi :

$$0 + 0 = 1$$

Ce qui est absurde.

La série $\sum cos(n\,\theta)\,r^n$ ne converge donc pas pour $r = 1$, car son terme général ne tend pas vers 0. On en déduit :

$$R \leq 1$$

Donc :

$$R = 1$$

L'intervalle maximal de convergence de la série est donc $]-1,1[$. Voyons la somme sur cet intervalle.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} cos(n\,\theta)\ x^n = Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{i\,n\,\theta}\,x^n\right) = Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(x\,e^{i\,\theta}\right)^n\right) = Re\left(\frac{1}{1 - x\,e^{i\,\theta}}\right)$$

$$= Re\left(\frac{1 - x\,cos(\,\theta) + i\,x\,sin(\,\theta)}{\left(1 - x\,cos(\,\theta)\right)^2 + \left(x\,sin(\,\theta)\right)^2}\right) = \frac{1 - x\,cos(\,\theta)}{x^2 - 2\,x\,cos(\,\theta) + 1}$$

b) on rappelle que les séries $\sum a_n\, x^n$ et $\sum n\, a_n\, x^{n-1}$ ont même rayon de convergence. Donc la série étudiée a même rayon que la série :

$$\sum n\,\frac{cos(n\,\theta)}{n}\;x^{n-1} = \sum cos(n\,\theta)\;x^{n-1} = \frac{1}{x}\sum cos(n\,\theta)\;x^n \;\;(pour\;x \neq 0)$$

laquelle a pour rayon 1.

Notons $S(x)$ la somme de la série étudiée. Alors, sur $]-1{,}1[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} cos(n\,\theta)\;x^{n-1}$$

Donc, pour $x \neq 0$:

$$S'(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} cos(n\,\theta)\;x^n = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} cos(n\,\theta)\;x^n - 1\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{1 - x\,cos(\,\theta)}{x^2 - 2\,x\,cos(\,\theta) + 1} - 1\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1 - x\,cos(\,\theta) - (x^2 - 2\,x\,cos(\,\theta) + 1)}{x^2 - 2\,x\,cos(\,\theta) + 1}\right)$$

$$= \frac{cos(\,\theta) - x}{x^2 - 2\,x\,cos(\,\theta) + 1} = -\;\frac{x - cos(\,\theta)}{\left(x - cos(\,\theta)\right)^2 + \left(sin(\,\theta)\right)^2}$$

On note que cette formule reste valable en 0. On en déduit :

$$S(x) - S(0) = \int_0^x S'(t)\,dt = -\int_0^x \frac{t - cos(\,\theta)}{\left(t - cos(\,\theta)\right)^2 + \left(sin(\,\theta)\right)^2}\;dt$$

Posons, par changement de variable :

$$u = \left(t - cos(\,\theta)\right)^2 + \left(sin(\,\theta)\right)^2$$

$$du = 2\,\left(t - cos(\,\theta)\right)dt$$

Alors :

$$S(x) = -\frac{1}{2}\int_1^{\left(x - cos(\,\theta)\right)^2 + \left(sin(\,\theta)\right)^2} \frac{1}{u}\;du = -\frac{1}{2}\;Ln\left(\left(x - cos(\,\theta)\right)^2 + \left(sin(\,\theta)\right)^2\right)$$

Resterait à étudier la convergence pour $x = 1$ et $x = -1$.

c) On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{\left|\frac{x^{3\,(n+1)}}{\left(3\,(n+1)\right)!}\right|}{\left|\frac{x^{3\,n}}{(3\,n)!}\right|} = \frac{|x|^3}{(3\,n+3)\,(3\,n+2)\,(3\,n)}$$

qui tend vers 0 à x fixé, n tendant vers l'infini. D'après la règle de D'alembert, la série converge. Le rayon de convergence est donc infini.

Posons :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3\,n}}{(3\,n)\,!}$$

Alors S est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3\,n-1}}{(3\,n-1)\,!}$$

$$S''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3\,n-2}}{(3\,n-2)\,!}$$

Donc, par somme :

$$S''(x) + S'(x) + S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{\,n}}{n\,!} = e^x$$

S est donc l'unique solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec les conditions initiales :

$$S(0) = 1, \qquad S'(0) = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$r^{\,2} + r + 1 = 0$$

de solutions complexes :

$$j = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad j^2 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La solution générale de l'équation homogène associée est donc :

$$e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\,cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + B\,sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right)$$

Une solution particulière de l'équation complète est :

$$\frac{1}{3}\,e^x$$

On en déduit :

$$S(x) = \frac{1}{3}e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\,cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + B\,sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right)$$

Soit :

$$S'(x) =$$

$$\frac{1}{3}e^x + e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\frac{1}{2}\left(A\,cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + B\,sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right) - A\frac{\sqrt{3}}{2}\,sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + B\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\right)$$

Les conditions initiales conduisent au système :

$$\begin{cases} A + \frac{1}{3} = 1 \\ B\,\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,A + \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B\ = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$S(x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}\,cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)\,e^{-\frac{1}{2}x}$$

d) La règle de D'alembert montre que le rayon de convergence est 1 mais la série converge également en (-1) car elle est alternée à terme général tendant en valeur absolue vers 0 en décroissant. En revanche elle diverge en 1 (par équivalent). Notons $S(x)$ la somme.

Rappelons que pour $t \in]-1,1[$:

$$Ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,t^n}{n}$$

$$Ln(1-t) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$$

Donc par différence :

$$Ln(1+t) - Ln(1-t) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$

Soit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2\,n+1}}{2\,n+1} = \frac{1}{2}\,Ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

Pour $x \in\ ]0,1[$ posons $x = t^2$ soit $t = \sqrt{x}$ alors :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2\,n}}{2\,n+1} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2\,n+1}}{2\,n+1} = \frac{1}{2\,t}\,Ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,Ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

Et pour $x \in\ [-1,0[$ posons $-x = t^2$ soit $t = \sqrt{-x}$ alors :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,t^{2\,n}}{2\,n+1} = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,t^{2\,n+1}}{2\,n+1} = \frac{1}{t}\,Atan(t) = \frac{1}{\sqrt{-x}}\,Atan(\sqrt{-x})$$

On vérifie au passage comme attendu car S est continue sur $]-1,1[$ que :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} \, Ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{-x}} \, Atan\left(\sqrt{-x}\right) = S(0) = 1$$