<u>Exercice 1</u> :

Etudier pour $x \in \mathbb{R}$ la convergence des séries de terme général

$$a)\quad \frac{n^2-n+1}{2^n} \qquad b)\quad \frac{n^2-n+1}{n!} \qquad c)\quad \frac{n\,(n-2)\,3^{n-1}}{n!}$$

$$d)\quad \frac{cos(n)}{e^n} \qquad e)\quad \frac{(2\,n+1)\,sin(n)}{n!\,5^n} \qquad f)\quad (-1)^n\,\frac{n\,(n-3)\,2^n}{3^{n+2}}$$

et calculer leur somme.

<u>Solution</u> :

Préliminaire : Rappelons pour $x \in \,]-1;1[$:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$$

et en dérivant terme à terme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\,x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

puis à nouveau :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

On en déduit les deux formules :

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{n=0}^{+\infty} n\,x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} n\,(n-1)\,x^n = \frac{2\,x^2}{(1-x)^3}\end{gathered}}$$

a) On a :

$$n^2\,\frac{n^2-n+1}{2^n} \sim \frac{n^4}{2^n} \to 0$$

La règle "$n^\alpha\,U_n$" s'applique et montre que la série converge.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - n + 1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{2\,\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4 + 2 = 6$$

b) On a :

$$n^2\,\frac{n^2 - n + 1}{n!} \sim \frac{n^4}{n!} \to 0$$

La règle "$n^\alpha\, U_n$" s'applique et montre que la série converge.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - n + 1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e + e = 2\,e$$

c) Posons pour $n \geq 2$:

$$U_n = \frac{n\,(n-2)\,3^{n-1}}{n!}$$

On a $U_n > 0$ et

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)\,(n-1)\,3^n}{(n+1)!}\;\;\frac{n!}{n\,(n-2)\,3^{n-1}} = \frac{3\,(n-1)}{n\,(n-2)} \to 0$$

D'après la règle de D'Alembert, la série converge.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\,(n-2)\,3^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-2)\,3^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big((n-1)-1\big)\,3^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)\,3^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= 3\,\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3^{n-2}}{(n-2)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$$

$$= 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} = 3\, e^3 - e^3 = 2\, e^3$$

d) On a :

$$\left| n^2 \frac{cos(n)}{e^n} \right| \leq \frac{n^2}{e^n} \to 0$$

donc la série est absolument convergente.

Introduisons alors la somme complexe également absolument convergente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{i\,n}}{e^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{i\,n-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{i-1}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{i-1}}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-1}(cos(1) + i\, sin(1))}$$

$$= \frac{e}{e - cos(1) - i\, sin(1)} = \frac{e\,(e - cos(1) + i\, sin(1))}{(e - cos(1))^2 + \, sin^2(1)}$$

En prenant la partie réelle, on en déduit :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{cos(n)}{e^n} = \frac{e\,(e - cos(1))}{(e - cos(1))^2 + \, sin^2(1)}$$

e) On a :

$$\left| n^2 \frac{(2\,n + 1)\, sin(n)}{n!\, 5^n} \right| \leq \frac{n^2\,(2\,n + 1)}{n!\, 5^n}$$

La suite majorante tendant vers 0 (utiliser la règle de D'alembert) la série converge absolument.

Introduisons alors la somme complexe également absolument convergente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n + 1)\, e^{i\,n}}{n!\, 5^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n + 1)}{n!} \left(\frac{e^i}{5}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\,n}{n!} \left(\frac{e^i}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{e^i}{5}\right)^n$$

$$= 2\, \frac{e^i}{5} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{e^i}{5}\right)^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{e^i}{5}\right)^n$$

$$= 2\ \frac{e^i}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{e^i}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{e^i}{5}\right)^n$$

$$= \left(2\ \frac{e^i}{5} + 1\right)\ e^{\frac{e^i}{5}} = \left(\frac{2}{5}\ (cos(1) + i\ sin(1)) + 1\right)\ e^{\frac{cos(1)+i\ sin(1)}{5}}$$

$$= \left(\left(\frac{2}{5}\ cos(1) + 1\right) + i\ sin(1)\right)\ e^{\frac{cos(1)}{5}} \left(cos\left(\frac{sin(1)}{5}\right) + i\ sin\left(\frac{sin(1)}{5}\right)\right)$$

Reste à prendre la partie imaginaire pour obtenir :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\,n+1)\ sin(n)}{n!\ 5^n} = \left(\frac{2}{5}\ cos(1) + 1\right)\ cos\left(\frac{sin(1)}{5}\right) - sin(1) sin\left(\frac{sin(1)}{5}\right)$$

f) On a pour $n > 3$:

$$\left| n^2\ (-1)^n\ \frac{n\ (n-3)\ 2^n}{3^{n+2}} \right| \leq n^2\ \frac{n\ (n-3)\ 2^n}{3^{n+2}} \sim \frac{n^4}{9\ \left(\frac{3}{2}\right)^n}$$

La quantité majorante tendant vers 0, la série est absolument convergente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\ \frac{n\ (n-3)\ 2^n}{3^{n+2}} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} n\ (n-3) \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} n\ (n-1-2) \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} n\ (n-1) \left(-\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= \frac{1}{9} \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n\ (n-1) \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \frac{2}{9} \left(-\frac{2}{3}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} n \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{4}{81} \times \frac{2}{\left(1 + \frac{2}{3}\right)^3} + \frac{4}{27} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{8}{81} \times \frac{1}{\frac{125}{27}} + \frac{4}{27} \times \frac{1}{\frac{25}{9}} = \frac{8}{375} + \frac{4}{75} = \frac{28}{375}$$