Combinaison d'exponentielles

<u>Exercice 1</u> :

a) Etudier pour $x \in \mathbb{R}$ la convergence des séries de terme général

$$\frac{x^n}{(2\,n)!}\,, \qquad \frac{x^n}{(3\,n)!}\,, \qquad \frac{x^n}{(4\,n)!}$$

et calculer leur somme. En déduire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,k)!}\,, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(3\,k)!}\,, \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4\,k)!}$$

b) Généraliser pour $p \in \mathbb{N}^*$ **aux séries de terme général :**

$$U_n = \frac{x^{p\,n}}{(p\,n)!}$$

<u>Solutions</u> :

a)

La règle de D'alembert montre que ces séries entières ont un rayon de convergence infini. En effet, en prenant la seconde pour exemple :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(3\,n+3)!} \times \frac{(3\,n)\,!}{1} = \frac{1}{(3\,n+3)\,(3\,n+2)\,(3\,n+1)}$$

Ce qui tend vers 0

Ces séries font intervenir respectivement, un terme sur deux, un terme sur trois et un terme sur quatre de la série associée à la fonction exponentielle de base e. Aussi allons utiliser un procédé déjà employé dans le fichier analyse combinatoire et faisant appel aux racines de l'unité.

Pour la première, il s'agit d'employer les racines carrées 1 et (-1). Ainsi :

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,x^k}{k!}$$

En additionnant ces deux relations, il vient :

$$e^x + e^{-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1+(-1)^k)x^k}{k!}$$

Si k est multiple de 2 alors :

$$(1+(-1)^k) = 2$$

Sinon :

$$(1+(-1)^k) = 0$$

Ainsi :

$$e^x + e^{-x} = 2\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,q}}{(2\,q)!}$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,q}}{(2\,q)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x)}$$

Ainsi pour $x \geq 0$, on peut poser $x = y^2$ soit $y = \sqrt{x}$ et on a

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2\,n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2\,n}}{(2\,n)!} = ch(y) = ch\left(\sqrt{x}\right)}$$

En particulier pour $x = 1$:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n)!} = ch(1)}$$

Et pour $x < 0$, on peut poser $x = -y^2$ soit $y = \sqrt{-x}$ et on a

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2\,n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2\,n}}{(2\,n)!} = cos(y) = cos\left(\sqrt{-x}\right)}$$

Voyons la seconde, en utilisant les 3 racines cubiques de l'unité :

$$1, j = e^{2\,i\frac{\pi}{3}}, j^2$$

Rappelons que j vérifie :

$$j^3 = 1$$

Soit, en passant 1 dans le membre de gauche et en factorisant:

$$(j^2 + j + 1)(j - 1) = 0$$

Donc :

$$j^2 + j + 1 = 0$$

Nous avons alors :

$$e^{j\,x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{j^k\, x^k}{k!}$$

$$e^{j^2\,x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{j^{2\,k}\, x^k}{k!}$$

Distinguons trois cas pour la valeur de k :

1er cas : $k = 3\,q,\ \ q \in \mathbb{N}$

$$j^k = j^{3\,q} = (j^3)^q = 1$$

$$j^{2\,k} = j^{6\,q} = (j^3)^{2\,q} = 1$$

2ème cas : $k = 3\,q + 1,\ \ q \in \mathbb{N}$

$$j^k = j^{3\,q+1} = j$$

$$j^{2\,k} = j^{6\,q+2} = j^2$$

3ème cas : $k = 3\,q + 2,\ \ q \in \mathbb{N}$

$$j^k = j^{3\,q+2} = j^2$$

$$j^{2\,k} = j^{6\,q+4} = j$$

Ainsi , si k n'est pas multiple de 3 :

$$1 + j^k + j^{2\,k} = 0$$

et alors :

$$e^x + e^{j\,x} + e^{j^2\,x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1 + j^k + j^{2\,k})\, x^k}{k!}$$

$$= \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(1 + j^{3q} + j^{6q})\, x^{3\,q}}{(3\,q)!}$$

$$= \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{3\, x^{3\,q}}{(3\,q)!} = 3 \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^{3\,q}}{(3\,q)!}$$

D'où :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^{3\,q}}{(3\,q)!} = \frac{e^{x} + e^{j\,x} + e^{j^2\,x}}{3}$$

Notons alors d'une part, que j et j^2 sont conjugués, d'autre part, pour tout complexe $z = a + i\,b$

$$e^{z} + e^{\overline{z}} = e^{a+i\,b} + e^{a-i\,b} = e^{a}\left(e^{i\,b} + e^{-i\,b}\right) = 2\,e^{a}\cos(b)$$

Or :

$$j\,x = -\frac{x}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,x$$

Donc :

$$e^{j\,x} + e^{j^2\,x} = 2\,e^{-\frac{x}{2}}\,cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)$$

D'où :

$$\boxed{\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^{3\,q}}{(3\,q)!} = \frac{e^{x} + 2\,e^{-\frac{x}{2}}\,cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right)}{3}}$$

Ainsi pour tout réel x, on peut poser $x = y^3$ soit $y = \sqrt[3]{x}$ et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n}}{(3\,n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{3\,n}}{(3\,n)!} = \frac{e^{y} + 2\,e^{-\frac{y}{2}}\,cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,y\right)}{3} = \frac{e^{\sqrt[3]{x}} + 2\,e^{-\frac{\sqrt[3]{x}}{2}}\,cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sqrt[3]{x}\right)}{3}$$

En faisant $x = 1$ il vient :

$$\boxed{\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{(3\,q)!} = \frac{1}{3}\left(e + \frac{2}{\sqrt{e}}\,cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}$$

Pour le troisième cas, faisons un même travail avec les racines quatrièmes de l'unité $1, -1, i, -i$ en notant que si k n'est pas multiple de 4 alors :

$$1 + (-1)^k + i^k + (-i)^k = 0$$

et donc :

$$e^x + e^{-x} + e^{i\,x} + e^{-i\,x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1 + (-1)^k + i^k + (-i)^k)\, x^k}{k!}$$

$$= \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(1 + (-1)^{4\,q} + i^{4\,q} + (-i)^{4\,q})\, x^{4\,q}}{(4\,q)!}$$

$$= \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{4\, x^{4\,q}}{(4\,q)!} = 4 \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^{4\,q}}{(4\,q)!}$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^{4\,q}}{(4\,q)!} = \frac{e^x + e^{-x} + e^{i\,x} + e^{-i\,x}}{4} = \frac{ch(x) + \cos(x)}{2}}$$

Ainsi pour $x \geq 0$, on peut poser $x = y^4$ soit $y = \sqrt[4]{x}$ et on a

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(4\,n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{4\,n}}{(4\,n)!} = \frac{ch(y) + \cos(y)}{2} = \frac{ch\left(\sqrt[4]{x}\right) + \cos\left(\sqrt[4]{x}\right)}{2}}$$

En faisant $x = 1$ il vient :

$$\boxed{\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{(4\,q)!} = \frac{ch(1) + \cos(1)}{2}}$$

b) La généralisation se fait avec les racines $pièmes$ de l'unité, soit en notant :

$$\omega = e^{2\,i\frac{\pi}{p}}$$

les p complexes :

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-1}$$

qui vérifient la relation :

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{p-1} = 0$$

D'où on tire que pour tout k non multiple de p :

$$1 + \omega^k + \omega^{2\,k} + \cdots + \omega^{k\,(p-1)} = 0$$

et ainsi :

$$e^x + e^{\omega\,x} + e^{\omega^2\,x} + \cdots + e^{\omega^{p-1}\,x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(1 + \omega^k + \omega^{2\,k} + \cdots + \omega^{k\,(p-1)}\right) x^k}{k!}$$

$$= \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{\left(1 + \omega^{q\,p} + \omega^{2\,q\,p} + \cdots + \omega^{q\,p\,(p-1)}\right) x^{p\,q}}{(p\,q)!}$$

$$= \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{p\,x^{p\,q}}{(p\,q)!} = p \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^{p\,q}}{(p\,q)!}$$

Soit :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^{p\,q}}{(p\,q)!} = \frac{e^x + e^{\omega\,x} + e^{\omega^2\,x} + \cdots + e^{\omega^{p-1}\,x}}{p}$$

Notons alors que tout nombre réel a on a :

$$a = \frac{a + \overline{a}}{2}$$

Et que pour tout entier k :

$$\frac{e^{\omega^k\,x} + \overline{e^{\omega^k\,x}}}{2} = Re\left(e^{\omega^k\,x}\right)$$

Ainsi, appliquée à la somme précédente, cela donne :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^{p\,q}}{(p\,q)!} = \frac{e^x + Re(e^{\omega\,x}) + Re\left(e^{\omega^2\,x}\right) + \cdots + Re\left(e^{\omega^{p-1}\,x}\right)}{p}$$

Or :

$$\omega^k x = \left(e^{2\,i\,\frac{\pi}{p}}\right)^k x = e^{2\,i\,\frac{k\,\pi}{p}} x = cos\left(\frac{2\,k\,\pi}{p}\right) x + i\,sin\left(\frac{2\,k\,\pi}{p}\right) x$$

Donc :

$$Re\left(e^{\omega^k\,x}\right) = e^{cos\left(\frac{2\,k\,\pi}{p}\right) x}\, cos\left(sin\left(\frac{2\,k\,\pi}{p}\right) x\right)$$

Ainsi :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^{p\,q}}{(p\,q)!} = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} e^{cos\left(\frac{2\,k\,\pi}{p}\right)x}\; cos\left(sin\left(\frac{2\,k\,\pi}{p}\right)\,x\right)}{p}$$

En faisant $x = 1$ il vient :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{(p\,q)!} = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} e^{cos\left(\frac{2\,k\,\pi}{p}\right)}\; cos\left(sin\left(\frac{2\,k\,\pi}{p}\right)\right)}{p}$$