<u>Enoncé</u> 1

Déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 3\,(x-y)\,f(x,y) = 0 \qquad (1)$$

On conseille le changement de variable :

$$\begin{cases} u = x\,y \\ v = x + y \end{cases}$$

<u>Solution</u> :

Notons d'abord :

$$\begin{cases} u = x\,y \\ v = x + y \end{cases} \Leftrightarrow x \text{ et } y \text{ racines de } P(X) = X^2 - v\,X + u$$

Or le discriminant de $P(X)$ est :

$$\Delta = v^2 - 4\,u$$

Une condition pour que $P(X)$ ait deux racines réelles distinctes est :

$$v^2 - 4\,u > 0$$

Sous cette condition, le système en $(x\,,y)$ précédent aura une solution unique si on lui adjoint la condition $x > y$ ou bien $x < y$

Ainsi, par exemple avec la première condition :

$$\begin{cases} u = x\,y \\ v = x + y \\ x > y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 - 4\,u > 0 \\ x = \dfrac{v + \sqrt{v^2 - 4\,u}}{2} \\ y = \dfrac{v - \sqrt{v^2 - 4\,u}}{2} \end{cases}$$

Notons :

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$$

$$D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$$

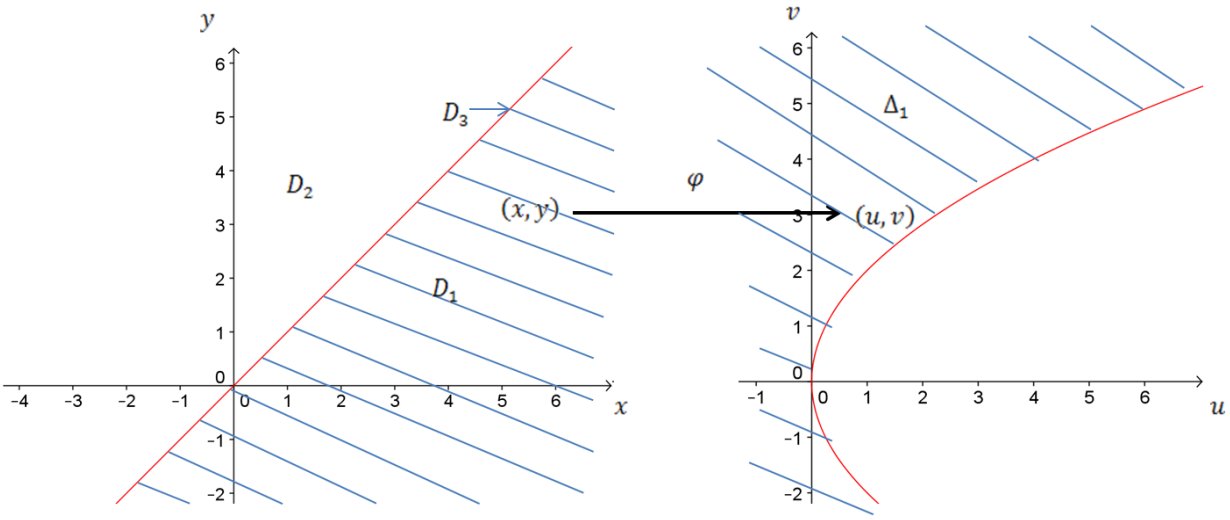
$$\Delta_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v^2 - 4\,u > 0\}$$

Considérons la fonction φ de D_1 dans Δ_1 définie par :

$$\varphi(x,y) = (x\,y, x + y) = (u,v)$$

Alors φ définit une bijection de D_1 dans Δ_1 d' application réciproque définie par :

$$\varphi^{-1}(u,v) = \left(\frac{v+\sqrt{v^2-4\,u}}{2}, \frac{v-\sqrt{v^2-4\,u}}{2}\right) = (x,y)$$



On peut alors définir sur Δ_1, pour toute fonction f admettant en tout point de D_1des dérivées partielles par rapport à chacune de ses variables la fonction :

$$g(u,v) = f\big(\varphi^{-1}(u,v)\big) = f(x,y)$$

φ^{-1} étant différentiable sur Δ_1 (car à dérivées partielles continues) g admet des dérivées partielles par rapport à chacune de ses variables en tout point de Δ_1. On a alors sur D_1 :

$$f(x,y) = g\big(\varphi(x,y)\big) = g(u,v)$$

Et ainsi par dérivée de la composée :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)\,\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)\,\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\,\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{cases}$$

Ainsi f est solution de l'équation différentielle (1) sur D_1 si et seulement si g est solution de l'équation différentielle :

$$(y-x)\,\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + 3\,(x-y)\,g(u,v) = 0$$

soit :

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 3\, g(u,v)}$$

Or la solution générale d'une telle équation est :

$$g(u,v) = C(v)\, e^{3\,u}$$

Où C est une fonction quelconque dérivable sur $\mathbb{R}$

La solution générale de l'équation (1) sur D_1 s'en déduit :

$$f(x,y) = C(x+y)\, e^{3\,x\,y}$$

En faisant un travail analogue sur D_2 la solution générale sur ce domaine de (1) est de la même forme :

$$f(x,y) = C_2(x+y)\, e^{3\,x\,y}$$

Or C et C_2 étant continues sur $\mathbb{R}$, nous aurons pour tout réel a :

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\(x,y)\in D_1}} f(x,y) = C(2\,a)\, e^{3\,a^2}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\(x,y)\in D_2}} f(x,y) = C_2(2\,a)\, e^{3\,a^2}$$

Ainsi, pour toute solution f de (1) sur $\mathbb{R}^2$ nous aurons nécessairement par continuité $C(2\,a) = C_2(2\,a)$ d'où $C = C_2$. Toute solution sur $\mathbb{R}^2$ sera donc nécessairement de la forme :

$$\boxed{f(x,y) = C(x+y)\, e^{3\,x\,y}}$$

Réciproquement, toute solution de cette forme convient car elle vérifie l'équation (1) sur D_1 et D_2 mais également sur D_3 sur lequel on vérifie aisément :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) + 3\,(x-x)\, f(x,x) = 0$$