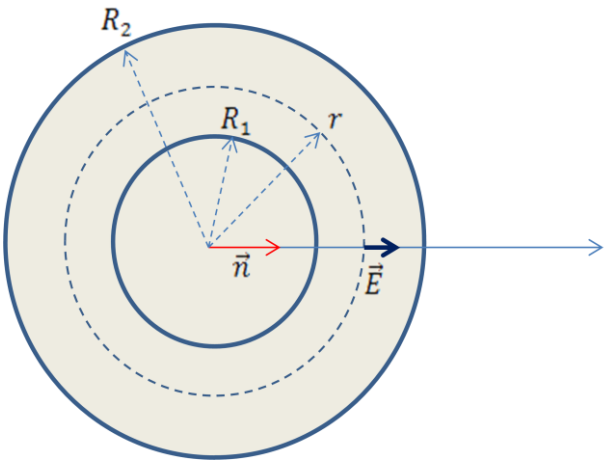
Capacité d'un condensateur sphérique

On considère un condensateur formé par deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$, la sphère interne portant une charge électrique $Q > 0$ et la sphère externe une charge $-Q$. La symétrie de la distribution fait que le champ électrique $\vec{E}$ entre les deux sphères est radial et porté par un rayon. Nous pouvons donc poser :

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{n}$$



1) En utilisant le théorème de Gauss, déterminer $E(r)$ en fonction de la charge Q et de r (1 point)
2) En déduire d'expression du potentiel électrostatique $V(r)$ entre les deux sphères (1 point)
3) En déduire la tension $U = V(R_1) - V(R_2)$ du condensateur en fonction de R_1 , R_2 et ε_0 (1 point)
4) En déduire la capacité $C = Q/U$ du condensateur (1 point)
5) Calculer la charge Q pour $R_1 = 4\ cm$, $R_2 = 4{,}2\ cm$, $U = 1000\ V$ (1 point)
   (On rappelle : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9$)

Correction

1)

$$E(r) \times 4\,\pi\,r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E(r) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}}$$

2)

$$E(r) = -\frac{dV}{dr}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} + constante$$

Soit, en prenant le potentiel nul quand r tend vers l'infini :

$$\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}}$$

3)

$$U = V(R_1) - V(R_2)$$

$$\boxed{U = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{R_2 - R_1}{R_1\,R_2}}$$

4)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R_1\,R_2}{R_2 - R_1}$$

5)

$$Q = C\,U = \frac{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R_1\,R_2}{R_2 - R_1}\,U = \frac{4 \times 4{,}2 \times 10^{-2}}{9 \times 10^9\,(4{,}2 - 4)} \times 10^3 = 8{,}4 \times 10^{-8}\,C$$