Calcul d'un coefficient de compressibilité isotherme

Soit un gaz obéissant à une équation d'état de la forme :

$$P\, V_m = c\, T\, \left(1 - \frac{a}{V_m}\right)$$

a et c étant deux constantes, V_m le volume d'une mole de gaz, P sa pression, T sa température

1) Donner les unités de chaque grandeur de la formule
2) Rappeler la relation entre le volume V occupé par n moles de gaz et le volume V_m occupé par une mole (les deux étant considérés à même température et pression)
3) En déduire l'équation d'état de ce gaz pour n moles occupant un volume V à la température T et la pression P
4) Sachant qu'en vertu de ce modèle, le volume V_m tend, à T fixé, vers l'infini quand P tend vers 0, en déduire la nature et la valeur de la constante c, le gaz ayant alors à faible pression, un comportement de gaz parfait
5) Déterminer, en fonction de a, c, T, V le coefficient de compressibilité isotherme de ce gaz, défini par :

$$K_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

On pourra le calculer, à partir de l'équation d'état initiale relative à une mole et noter pour simplifier V le volume molaire.

6) Le coefficient de compressibilité dépend t'il du nombre de moles ?

Corrigé

1) $P\ :\ Pa, V_m: m^3\ mol^{-1}, T: K, c\ :\ J\ K^{-1}\ mol^{-1}, a: m^3\ mol^{-1}$
2) $V = n\ V_m$
3)

$$\boxed{P\ V = n\ c\ T\ \left(1 - \frac{a\ n}{V}\right)}$$

4) Pour un gaz parfait $P\ V = n\ R\ T$ donc $c = R$
5) Différentions l'équation d'état molaire :

$$dP\ V + P\ dV = R\ T\ \frac{a}{V^2}\ dV$$
$$dP\ V = \left(\frac{a\ R\ T}{V^2} - P\right)\ dV$$
$$dP\ V = \left(\frac{a\ R\ T}{V^2} - \frac{R\ T}{V}\left(1 - \frac{a}{V}\right)\right)\ dV$$
$$dP\ V = \left(\frac{R\ T\ (2\ a - V)}{V^2}\right)\ dV$$

$$\frac{dV}{dP} = \frac{V^3}{R\ T\ (2\ a - V)}$$

$$\boxed{K_T = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP} = \frac{V^2}{R\ T\ (V - 2\ a)}}$$

6) K_T ne dépend pas du nombre de moles car :

$$K_T = -\frac{1}{V_m}\frac{dV_m}{dP}$$