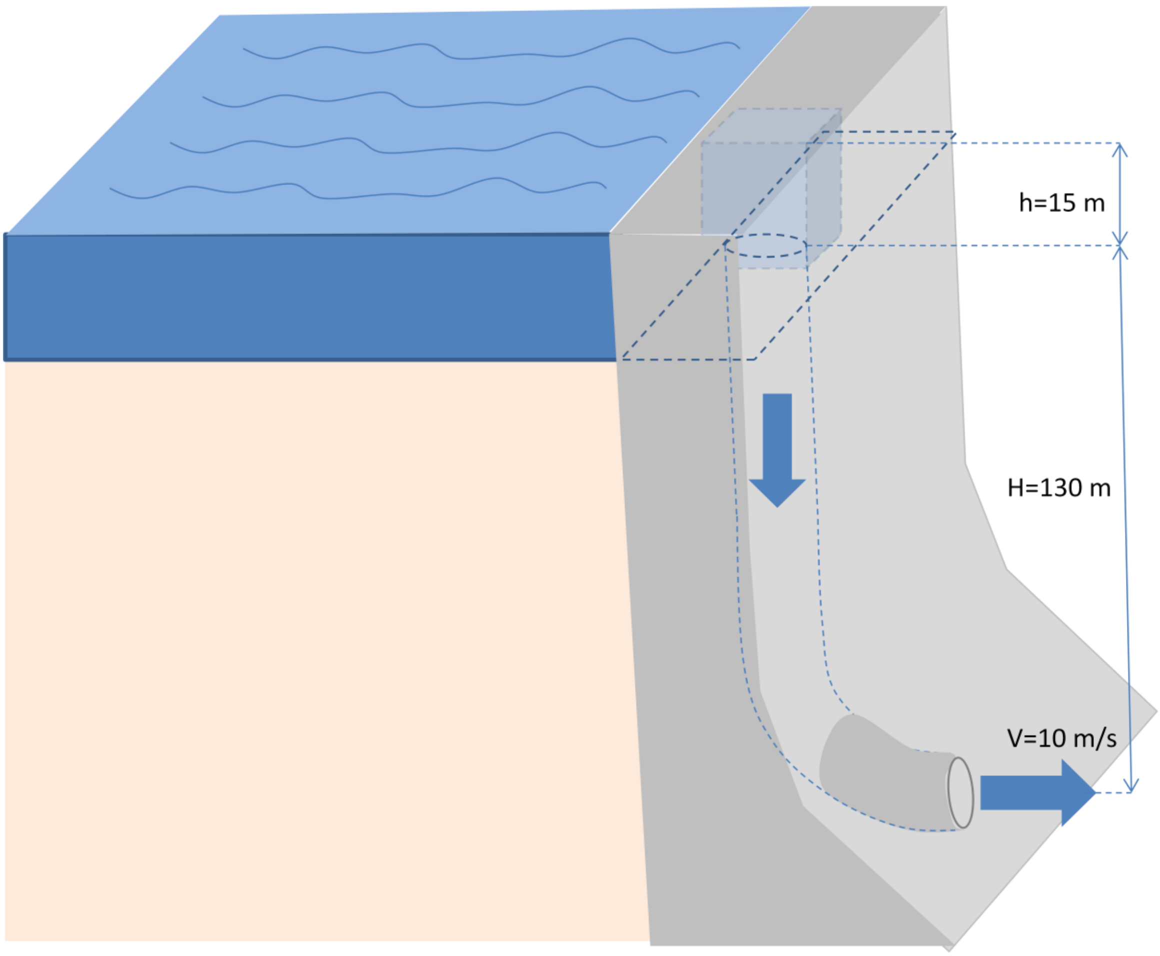
Etude d'un barrage hydroélectrique

Le but de ce problème est l'étude la puissance mécanique fournie par un barrage à une turbine en vue de produire de l'électricité et d'alimenter des villages voisins.

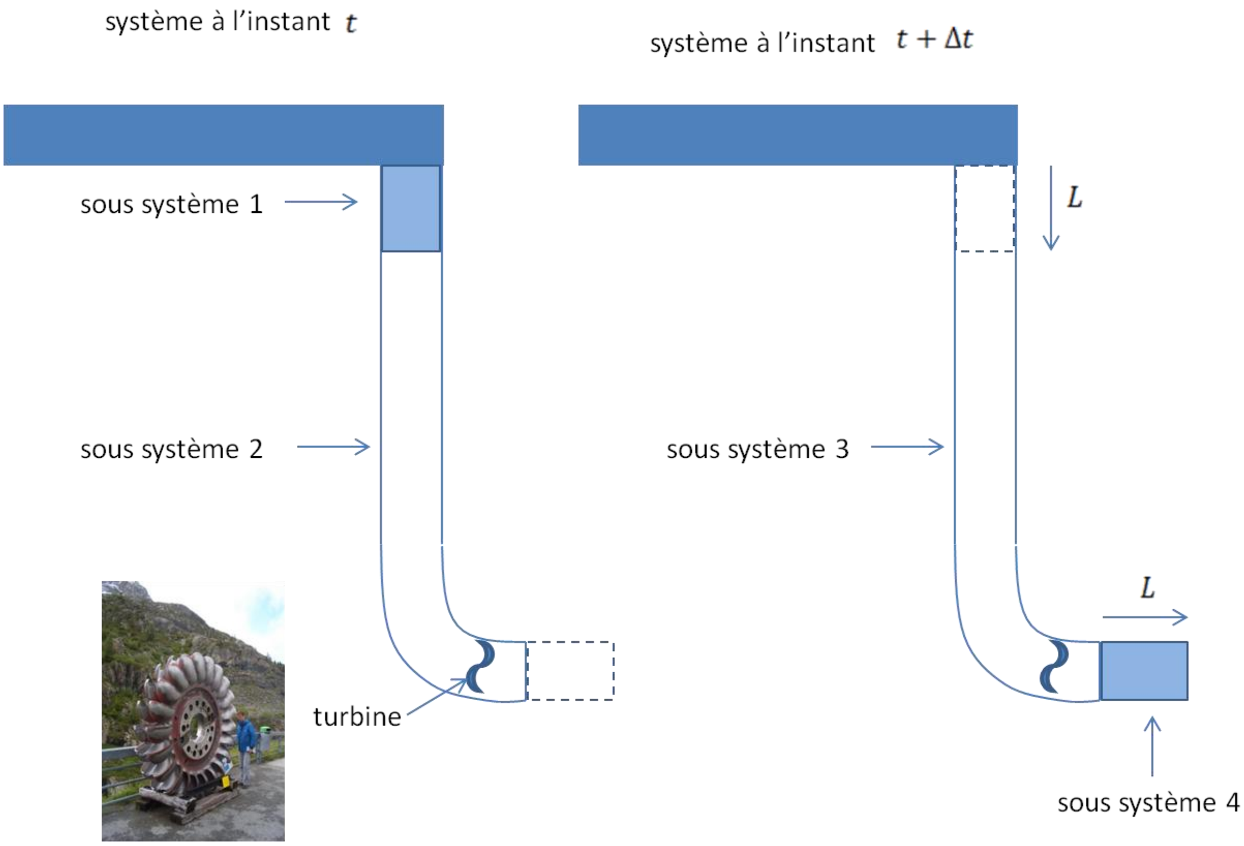


Les données sont :

- Vitesse de l'eau dans la conduite et à sa sortie : $v = 10\ \ m\,s^{-1}$
- Hauteur de chute de l'eau : $H = 130\ m$
- Hauteur d'eau dans le barrage : $h = 15\ m$
- Section de la conduite d'eau : $S = 0{,}35\ m^2$
- Masse volumique de l'eau : $\rho_{eau} = 1000\ kg\ m^{-3}$
- Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81\ m\ s^{-2}$
- Capacité thermique massique de l'eau aux températures usuelles : $c_{eau} = 4180\ J\ kg^{-3}$
- Température de l'eau en amont (dans le réservoir) $T_0 = 290\ K$
- Température de l'eau en aval (en bas du barrage): $T_1 = 292\ K$

L’eau étant incompressible, elle s’écoule à vitesse constante dans la conduite en régime permanent.

On considère alors le système formé par l’eau située à un instant t entre l’entrée de la conduite et sa sortie. Pendant une durée Δt, l’eau se déplace d’une quantité L. On supposera la durée suffisamment faible pour qu’à sa sortie du tube, l’eau forme un tube de même section.



Le système est décomposé en sous systèmes tels qu’indiqués sur la figure. Formé des sous systèmes 1 et 2 à l’instant t, le système devient formé des sous systèmes 3 et 4 à l’instant $t + \Delta t$.

En régime permanent, les caractéristiques de ces sous-systèmes ne dépendent pas du temps.

On note z_1 la coordonnée sur un axe vertical orienté vers le haut du centre de gravité du sous système 1 et z_4 celle du sous système 4

Questions

1) Exprimer L en fonction de v et de Δt.
2) Exprimer en fonction de S, v , Δt, le volume du sous système 1
3) Exprimer en fonction de ρ_{eau}, S , v , Δt et z_1 l'énergie totale macroscopique (cinétique et potentielle) du sous système 1
4) Exprimer en fonction de ρ_{eau}, S , v , Δt et z_4 l'énergie totale macroscopique (cinétique et potentielle) du sous système 4

On s'intéresse maintenant à la transformation du système entre les instants t et $t+\Delta t$. On note δQ la chaleur échangée par ce système avec l'extérieur, δW le travail des forces extérieures de pression, $\delta W_{turbine}$ le travail échangé par le système avec la turbine.

5) Exprimer le travail de la pression P_1 en amont en fonction de P_1 , S , v , Δt (on suppose la durée Δt suffisamment faible pour que P_1 puisse être considérée constante.
6) Exprimer de façon analogue, le travail de la pression P_0 en aval
7) En déduire δW en fonction de P_0 , P_1 , S , v , Δt puis en fonction de ρ_{eau}, g , h S , v , Δt
8) En notant E_2 l'énergie totale (mécanique macroscopique + interne) du système 2 , E_3 celle du système 3, que peut on dire de ces deux valeurs compte tenu du régime permanent ?
9) Exprimer l'énergie totale $E(t)$du système à l'instant t en fonction de l'énergie interne U_1 du système 1, de son énergie cinétique et potentielle de pesanteur et de E_2
10) Exprimer l'énergie totale $E(t+\Delta t)$ du système à l'instant $t+\Delta t$ en fonction de l'énergie interne U_4 du système 4, de son énergie cinétique et potentielle de pesanteur et de E_3.
11) En écrivant que la variation d'énergie totale est égale à la chaleur et au travail échangé avec l'extérieur autre que le travail des forces de pesanteur, établir la relation :

$$U_4 - U_1 - \rho_{eau}\, S\, v\, \Delta t\, g\, (H+h) = \delta W_{turbine} + \delta Q$$

12) En supposant la température du sous système 4 égale à T_1 et en notant qu'il est une transformation du sous système 1 de température T_0 , exprimer la variation d'énergie interne $U_4 - U_1$ en fonction de ρ_{eau} , c_{eau}, S , v, Δt , T_0 , T_1
13) En déduire que la puissance fournie à la turbine est :

$$\mathcal{P}^{fournie} = \frac{-\delta W_{turbine}}{\Delta t} = \rho_{eau}\, S\, v\, g\, (H+h) - \left(\rho_{eau}\, S\, v\, c_{eau}(T_1 - T_0) + \frac{|\delta Q|}{\Delta t}\right)$$

La puissance fournie se compose de deux termes. Le premier est égal à la perte d'énergie potentielle du système formé par l'eau du barrage considérée entre une section en amont et une section en aval. C'est donc la puissance $\mathcal{P}^{pesanteur}$ des forces de pesanteur sur ce système

Le second terme traduit la puissance perdue sous forme d'énergie microscopique dans l'interaction de l'eau avec la turbine et par son frottement dans la conduite (puissance dissipée). On peut donc écrire :

$$\mathcal{P}^{fournie} = \mathcal{P}^{pesanteur} - \mathcal{P}^{dissipée}$$

Une mesure de la puissance fournie à la turbine donne une valeur de $4{,}6\ MW$.

14) Calculer $\mathcal{P}^{pesanteur}$ et en déduire $\mathcal{P}^{dissipée}$
15) En déduire le rendement de ce barrage sous forme :

$$r = \frac{\mathcal{P}^{fournie}}{\mathcal{P}^{pesanteur}}$$

On suppose que 4 conduites identiques sont installées sur ce barrage afin d'en multiplier la puissance par 4. On fait l'hypothèse qu'un foyer d'un village avoisinant consomme en moyenne sur une année 20 KWh par jour.

16) Quelle énergie en KWh peut fournir le barrage en un jour (on négligera les pertes électriques (pertes magnétiques et effet Joule dû au transport de l'électricité) ?
17) En supposant (à tort, mais pour simplifier !) les besoins journaliers de chaque foyer constants sur l'année, combien de foyers ce barrage peut il alimenter en électricité ?

Afin de caractériser de façon plus parlante la puissance dissipée, on définit une hauteur de charge h' comme étant la hauteur d'eau dont il faudrait amputer le réservoir du barrage pour obtenir la même puissance fournie sans tenir compte de puissance dissipée. On a ainsi :

$$\mathcal{P}^{dissipée} = \rho_{eau}\, S\, v\, g\, h'$$

18) Calculer h'

A titre d'information, le plus grand barrage au monde est celui des trois gorges en Chine sur le Yangzi Jiang dont les caractéristiques sont :

Altitude du réservoir : 175 m

Nombre de turbines : 32

Puissance totale : 22 500 MW (soit : 703 MW par turbine à comparer à nos 4,6 MW de l'exercice)

Le plus grand barrage français du point de vue puissance électrique est celui de Grand'maison (Isère)

Altitude du réservoir (par rapport au lit de rivière) : 140 m

Puissance totale : 1 800 MW (comparer avec le chinois, on se sent petit !!!)

Nombre de turbines : 12

Corrigé :

1) $L = v\,\Delta t$
2) $V_1 = S\,v\,\Delta t$
3)

$$Ec_1 = \frac{1}{2}\,\rho_{eau} S\,v\,\Delta t\,v^2 = \frac{1}{2}\,\rho_{eau} S\,v^3\,\Delta t$$

$$E_{p1} = \rho_{eau}\,S\,v\,\Delta t\,g\,z_1$$

$$\boxed{E_{méca1} = \rho_{eau} S\,v\,\Delta t\left(\frac{1}{2}\,v^2 + g\,z_1\right)}$$

4)

$$\boxed{E_{méca4} = \rho_{eau} S\ v\ \Delta t\ \left(\frac{1}{2}\ v^2 + g\ z_4\right)}$$

5)

$$\delta W_{amont} = P_1\ S\ L = P_1\ S\ v\ \Delta t$$

6)

$$\delta W_{aval} = -P_0\ S\ L = -P_0\ S\ v\ \Delta t$$

7)

$$\boxed{\delta W = (P_1 - P_0)\ S\ v\ \Delta t = \rho_{eau}\ g\ h\ S\ v\ \Delta t}$$

8)

$$E_2 = E_3$$

9)

$$E(t) = U_1 + \rho_{eau} S\ v\ \Delta t\ \left(\frac{1}{2}\ v^2 + g\ z_1\right) + E_2$$

10)

$$E(t + \Delta t) = U_4 + \rho_{eau} S\ v\ \Delta t\ \left(\frac{1}{2}\ v^2 + g\ z_4\right) + E_3$$

11) Appliquons le principe de la variation de l'énergie totale dérivé du premier principe

$$E(t + \Delta t) - E(t) = \delta W + \delta W_{turbine} + Q$$

Soit :

$$U_4 - U_1 + \rho_{eau}\ S\ v\ \Delta t\ g\ (\ z_4 - \ z_1) = \delta W + \delta W_{turbine} + \delta Q$$

$$\boxed{U_4 - U_1 - \rho_{eau}\ S\ v\ \Delta t\ g\ (H + h) = \delta W_{turbine} + \delta Q}$$

12) L'eau étant incompressible, son énergie interne ne dépend que de sa température et :

$$\boxed{U_4 - U_1 = \rho_{eau}\ S\ v\ \Delta t\ c_{eau}\ (T_1 - T_0)}$$

13)

$$\mathcal{P}_{fournie} = \frac{-W_{turbine}}{\Delta t}$$

$$\mathcal{P}_{fournie} = \frac{\rho_{eau}\ S\ v\ g\ (H + h)\ \Delta t - \rho_{eau}\ S\ v\ c_{eau}\ \Delta t\ (T_1 - T_0) + \delta Q}{\Delta t}$$

Sachant que $\delta Q < 0$

$$\boxed{\mathcal{P}_{fournie} = \rho_{eau}\, S\, v\, g\, (H + h) - \left(\rho_{eau}\, S\, v\, c_{eau}\, (T_1 - T_0) + \frac{|\delta Q|}{\Delta t}\right)}$$

14)

$$\mathcal{P}_{pesanteur} = \rho_{eau}\, S\, v\, g\, (H + h)$$

$$\mathcal{P}_{pesanteur} = 1000 \times 0,35 \times 10 \times 9,81 \times 145 \approx 5,0\ MW$$

15) rendement

$$r = \frac{\mathcal{P}_{fournie}}{\mathcal{P}_{pesanteur}} = \frac{4,6}{5,0} = 0,92$$

16) Energie fournie aux quatre turbines en un jour

$$W_{fournie} = 4,6 \times 10^6 \times 24 \times 4 = 4,4 \times 10^8\ W\,h = 4,4 \times 10^5\ KWh$$

17) Nombre de foyers alimentés :

$$N = \frac{4,4 \times 10^5}{20} = 22\ 000$$

18) Hauteur de charge

$$h = \frac{\mathcal{P}_{dissipée}}{\rho_{eau}\, S\, v\, g} = \frac{(5,0 - 4,6) \times 10^6}{1000 \times 0,35 \times 10 \times 9,81} \approx 11,6\ m$$