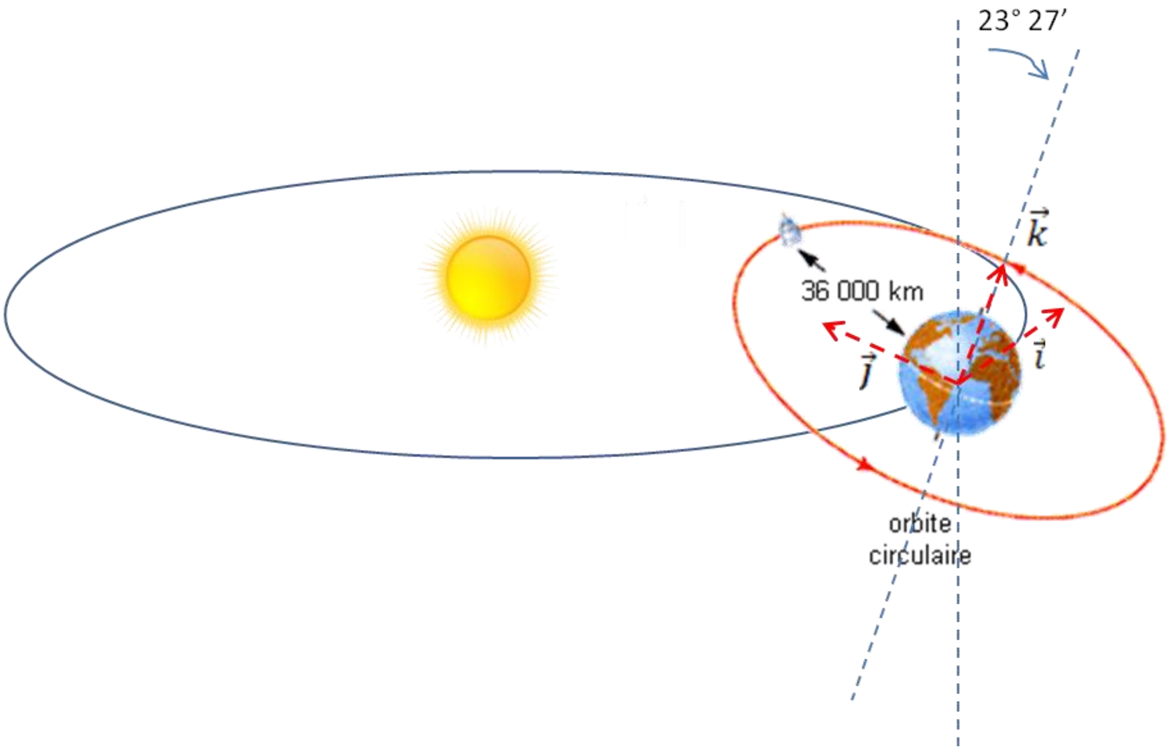
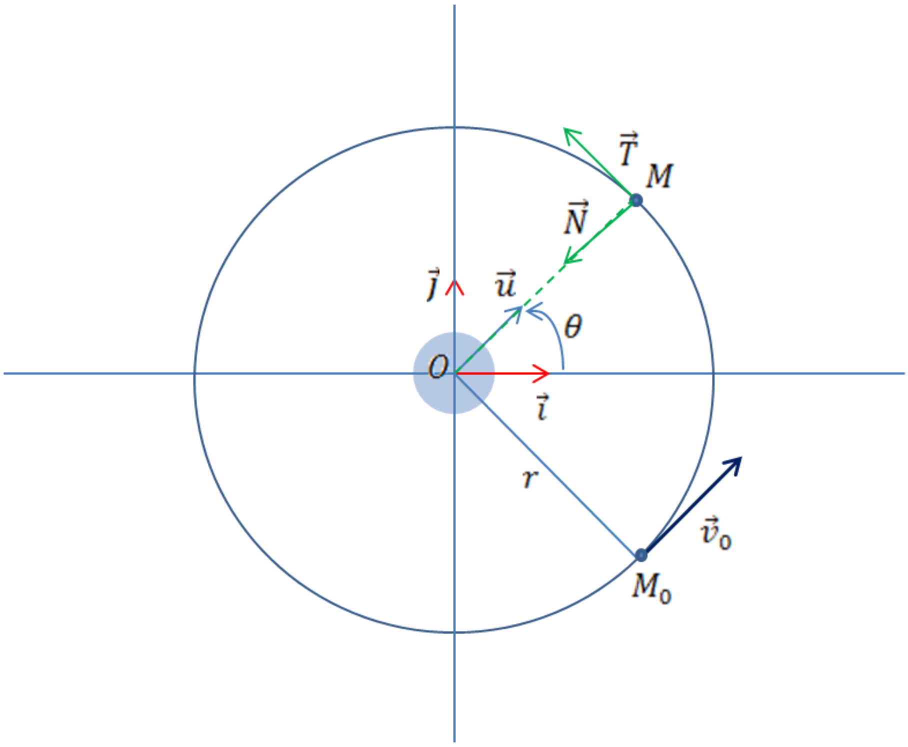
Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est un satellite ayant un mouvement circulaire sur une orbite située dans le plan équatorial à environ 36 000 km de la surface de la Terre et tel qu'il conserve une position fixe par rapport à un méridien terrestre. Nous allons montrer qu'une telle trajectoire est possible et comment en déterminer les caractéristiques en appliquant la seconde loi de Newton.



Tout d'abord, rappelons que le centre de la Terre O décrit autour du soleil (dans un référentiel dit héliocentrique) une trajectoire quasi circulaire (plus précisément une ellipse dont le centre du soleil est un foyer) dans un plan appelé plan de l'écliptique. Considérons à un instant donné le vecteur unitaire tangent à cette trajectoire et pointant dans la direction du mouvement $\vec{\imath}$. Soit $\vec{\jmath}$ le vecteur unitaire directement perpendiculaire à ce dernier et situé dans le plan équatorial et $\vec{k}$ le vecteur unitaire de l'axe instantané de rotation de la Terre pointant vers le Nord. Le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ définit un référentiel qualifié de géocentrique. Dans le référentiel, la Terre a un mouvement de rotation d'Ouest en Est de période T égale à 23 heures 56 min 4 s et le satellite géostationnaire doit avoir un mouvement circulaire uniforme de même période.

Afin de conduire l'étude de la trajectoire, il nous faut disposer d'un référentiel où la seconde loi de Newton est applicable (sans tenir compte de forces d'inerties) c'est-à-dire un référentiel Galiléen ou qui peut être considéré comme tel pour l'expérience concernée. Or le référentiel Galiléen de référence est le référentiel héliocentrique et pendant une période de 24, le référentiel géocentrique peut être considéré comme en translation rectiligne par rapport au référentiel héliocentrique donc considéré comme Galiléen pour l'étude du mouvement sur cette période. Il en résulte une étude dans ce référentiel de la trajectoire d'un satellite ayant une position initiale M_0 et un vecteur vitesse initial $\vec{v}_0$ tous deux situés dans le plan équatorial et tels que $\overrightarrow{OM_0}$ soit orthogonal à $\vec{v}_0$



Le satellite de masse m n'est soumis qu'à l'attraction terrestre, c'est-à-dire son poids $\vec{P}$ qui est une force radiale d'expression :

$$\vec{P} = -G\,\frac{m\,M_T}{r^2}\,\vec{u}$$

Le mouvement s'effectue donc dans le plan $(O, \overrightarrow{OM_0}, \vec{v}_0)$ qui est le plan équatorial. Pour que le mouvement soit un mouvement circulaire de centre O et de rayon r il faut et il suffit que la seconde loi de Newton soit vérifiée à tout instant, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\vec{P} = m\,\vec{a}$$

Soit dans le repère de Frénet :

$$G\,\frac{m\,M_T}{r^2}\,\vec{N} = m\,\dot{v}\,\vec{T} + m\,\frac{v^2}{r}\,\vec{N}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} m\,\dot{v} \\ m\,\dfrac{v^2}{r} = G\,\dfrac{m\,M_T}{r^2} \end{cases}$$

La première relation impose que v soit constant donc que le mouvement soit uniforme. La seconde relation donne :

$$v^2 = \frac{G\,M_T}{r}$$

Ainsi pour chaque rayon r il existe une vitesse v conduisant à une trajectoire circulaire uniforme. Si en plus, on veut que la période du mouvement soit celle de la Terre T alors on doit avoir la condition supplémentaire :

$$v = \frac{2\,\pi\,r}{T}$$

Ainsi en reportant dans la précédente relation :

$$\frac{4\,\pi^2\,r^2}{T^2} = \frac{G\,M_T}{r}$$

Soit :

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\,\pi^2}{G\,M_T}}$$

Ceci est l'expression de la seconde loi de Képler. Mais ce qui nous intéresse ici est le calcul du rayon de trajectoire du satellite géostationnaire soit :

$$r^3 = \frac{T^2\,G\,M_T}{4\,\pi^2}$$

ou :

$$r = \left(\frac{T^2\,G\,M_T}{4\,\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Or à la surface de la Terre, nous avons :

$$\left\|\vec{P}\right\| = m\,g_0 = m\,\frac{G\,\,m\,M_T}{{R_T}^2}$$

Soit :

$$G\,M_T = {R_T}^2\,g_0$$

D’où une formule ne faisant apparaître que des données mesurables à la surface de la Terre:

$$\boxed{r = \left(\frac{T^2\, {R_T}^2\, g_0}{4\,\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

Avec :

$$T = 23 \text{ heures } 56 \text{ min } 4 \text{ s}, \qquad R_T = 6370\ Km, \qquad g_0 = 9{,}81\ m\, s^{-2}$$

Le calcul numérique conduit à :

$$r \approx \left(\frac{(23{,}9 \times 3600)^2\ (6370 \times 10^3)^2\ 9{,}81}{4\,\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 42\,100\,000\ m = \ 42\,100\ Km$$

Soit une altitude de :

$$z = r - R_T \approx 35\,700\ Km$$