Comparaison de deux compressions adiabatiques

Le but de l'exercice est de comparer les états finaux d'une mole de gaz parfait dans deux compressions adiabatiques, l'une étant effectuée de façon réversible, l'autre non.

L'état initial du gaz est défini par les paramètres d'état : $P_0 = 1\ bar, V_0\ , T_0 = 293\ K$

Le gaz est comprimé de façon adiabatique jusqu'à une pression $P_1 = 10\ P_0$

On définit le taux de compression par :

$$x = \frac{P_1}{P_0}$$

Le rapport des capacités calorifique à pression isobare et isochore du gaz est :

$$\gamma = 1{,}4$$

Pour toutes les questions qui suivent, on donnera une formule littérale puis on effectuera l'application numérique.

1) Rappeler la relation liant les paramètres initiaux et en déduire V_0
2) Rappeler ce que signifie le terme adiabatique
3) Dans le cas où la compression est effectuée de façon réversible :

    - que peut-on dire de l'entropie du gaz parfait le long du chemin de transformation constitué d'une suite d'états d'équilibre ?
    - Quels sont alors les trois relations reliant les paramètres d'état au cours de cette transformation ?
    - En déduire le volume final V_1 en fonction du volume initial V_0, de γ et de x
    - Déterminer le travail échangé par le gaz (donc reçu par le gaz et fourni par l'extérieur) au cours de la transformation en fonction de R, T_0, x, γ

4) Dans le cas où la compression est effectuée de façon brutale, par application de la pression finale tout au long de la transformation :
    - Exprimer la variation d'énergie interne du gaz entre l'état initial et l'état final en fonction de P_0, V_0, x, γ et le volume final $V_1{}'$
    - Déterminer le travail échangé par le gaz (donc reçu par le gaz et fourni par l'extérieur) au cours de la transformation en fonction de $P_0, V_0, x, V_1{}'$
    - Mettre en relation les grandeurs précédentes à l'aide du premier principe
    - En déduire V'_1 en fonction de V_0, γ et x
    - Comparer cette valeur de volume à celle obtenue avec une transformation réversible. Est ce la même ?

- Déterminer les températures finales dans les deux cas, T_1 pour la transformation réversible et T'_1 pour l'autre, en fonction de T_0, γ et x. Justifier leur écart.
- Exprimer la variation d'entropie dans le cas de la compression irréversible en fonction de R, γ et x.. On rappelle l'entropie d'une mole de gaz parfait :

$$S = \frac{R}{\gamma - 1} Ln(P\, V^{\gamma}) + cte$$

Donnée : $R = 8{,}31\, J\, K^{-1} mol^{-1}$

<u>Corrigé</u> :

1)

$$P_0\, V_0 = R\, T_0$$

donc :

$$\boxed{V_0 = \frac{R\, T_0}{P_0} = \frac{8{,}31 \times 293}{10^5} \approx 2{,}43 \times 10^{-3}\, m^3}$$

2)

Une transformation adiabatique est une transformation dans laquelle un système n'échange pas de chaleur avec le milieu extérieur.

3) Cas d'une compression adiabatique réversible

Au cours d'une transformation adiabatique réversible, l'entropie S du système reste constante le long du chemin de transformation car :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Une telle transformation est qualifiée d'isentropique. On a alors le long du chemin de transformation :

$$\boxed{P\, V^{\gamma}, T\, V^{\gamma - 1}, T^{\gamma}\, P^{1-\gamma}\ constants}$$

On utilise la première :

$$P_1\, {V_1}^{\gamma} = P_0\, {V_0}^{\gamma}$$

D'où on tire :

$$V_1{}^{\gamma} = \frac{P_0}{P_1}\, V_0{}^{\gamma} = \frac{V_0{}^{\gamma}}{x}$$

Soit :

$$\boxed{V_1 = \frac{V_0}{x^{\frac{1}{\gamma}}} = \frac{V_0}{10^{\frac{1}{1,4}}} \approx 0{,}193\, V_0}$$

Le travail échangé par le gaz est :

$$W = \Delta U = \frac{R}{\gamma - 1}\, \Delta T = \frac{\Delta(P\, V)}{\gamma - 1} = \frac{P_1 V_1 - P_0\, V_0}{\gamma - 1} = \frac{x\, P_0 V_0 x^{-\frac{1}{\gamma}} - P_0\, V_0}{\gamma - 1}$$

Soit :

$$\boxed{W = \frac{P_0 V_0}{\gamma - 1}\left(x^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1\right) = \frac{R\, T_0}{\gamma - 1}\left(x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)}$$

Soit numériquement :

$$W = \frac{8{,}31 \times 293}{0{,}4}\left(10^{\frac{0,4}{1,4}} - 1\right) \approx 5\ 665\ J$$

4) Compression brutale (donc irréversible)

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta U = \frac{R}{\gamma - 1}\, \Delta T = \frac{P_1 V'_1 - P_0\, V_0}{\gamma - 1} = \frac{P_0\,(x\, V'_1 - V_0)}{\gamma - 1} \\ W = -P_1\, \Delta V = -P_1(V'_1 - V_0) = x\, P_0\,(V_0 - V'_1)\end{gathered}}$$

Or la transformation étant adiabatique :

$$\Delta U = W$$

Soit :

$$\frac{P_0\,(x\, V'_1 - V_0)}{\gamma - 1} = x\, P_0\,(V_0 - V'_1)$$

$$x\, V'_1 - V_0 = (\gamma - 1)\, x\, V_0 - (\gamma - 1)\, x\, V'_1$$

$$\big((\gamma - 1)\, x + x\big)\, V'_1 = V_0\,\big((\gamma - 1)\, x + 1\big)$$

$$\gamma\, x\, V'_1 = V_0\,\big((\gamma - 1)\, x + 1\big)$$

$$\boxed{V'_1 = V_0\ \frac{(\gamma-1)\,x+1}{\gamma\,x} = V_0\ \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma\,x}\right) = V_0\ \left(\frac{0,4}{1,4}+\frac{1}{14}\right)\ \approx 0,357\ V_0}$$

$$V'_1 > V_1$$

La compression réversible conduit donc à un volume plus faible.

Voyons ce qui concerne les températures.

$$T_1 = \frac{P_1\ V_1}{R} = \frac{x\ P_0\ V_0 x^{-\frac{1}{\gamma}}}{R} = T_0\ x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 293 \times 10^{\frac{0,4}{1,4}} \approx 566\ K$$

$$T'_1 = \frac{P_1\ V'_1}{R} = \frac{x\ P_0\ V_0}{R}\ \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma\,x}\right) = T_0\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}x+\frac{1}{\gamma}\right) \approx 1046\ K$$

Comme attendu la compression brutale conduit à une température plus élevée (c'est le phénomène observé lorsque l'on veut gonfler un pneu trop rapidement, la pompe chauffe)

Calculons la variation d'entropie pour la compression brutale :

$$\boxed{\Delta S = \frac{R}{\gamma-1}\ Ln\left(\frac{P_1\ {V'_1}^{\gamma}}{P_0\ {V_0}^{\gamma}}\right) = \frac{R}{\gamma-1}\ Ln\left(x\ \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma\,x}\right)^{\gamma}\right)}$$

Soit numériquement :

$$\Delta S = \frac{8,31}{0,4}\ Ln\left(10\ \left(\frac{0,4}{1,4}+\frac{1}{14}\right)^{1,4}\right) \approx 17,9\ J\ K^{-1}$$