Rotation vectorielle dans l'espace

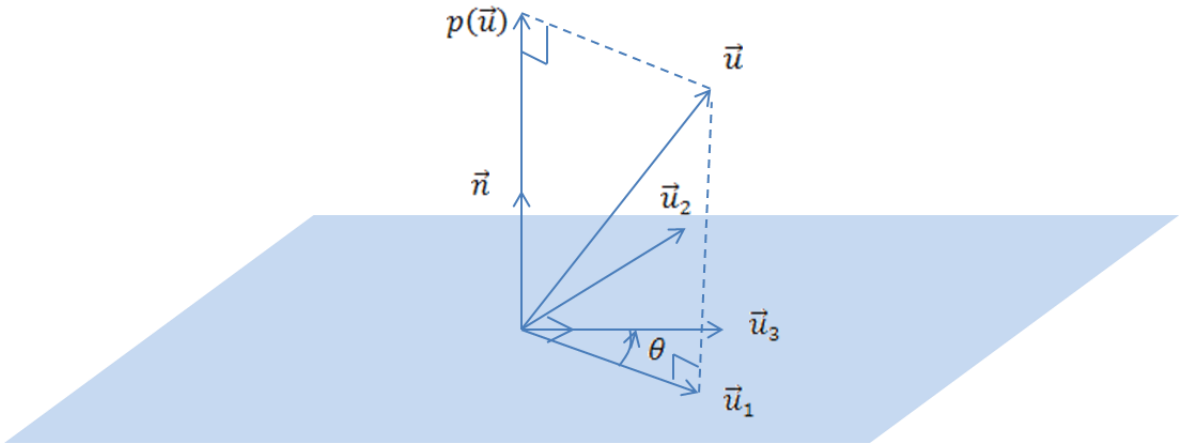
Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur quelconque de l'espace

1) Exprimer le projeté orthogonal $p(\vec{u})$ de $\vec{u}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{n}$ en fonction de $\vec{u}$ de $\vec{n}$ et du produit scalaire.
2) En déduire une expression du projeté $\vec{u}_1$ de $\vec{u}$ sur le plan vectoriel orthogonal à $\vec{n}$ en fonction de $\vec{u}$ de $\vec{n}$ et du produit scalaire
3) A l'aide du produit vectoriel donner une expression du vecteur $\vec{u}_2$ de même norme que $\vec{u}_1$ et tel que $(\vec{n}, \vec{u}_1, \vec{u}_2)$ soit une base directe
4) En déduire une expression du vecteur $\vec{u}_3$ situé dans le plan orthogonal à $\vec{n}$ orienté par $\vec{n}$ et tel que $(\vec{u}_1, \vec{u}_3) = \theta$ en fonction de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$
5) En déduire l'expression du vecteur $r(\vec{u})$ obtenu par rotation de $\vec{u}$ d'un angle θ autour de la droite vectorielle orientée par $\vec{n}$ en fonction de $\theta, \vec{u}, \vec{n}$ du produit scalaire et du produit vectoriel
6) Application : L'espace étant muni d'une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère le vecteur suivant :

$$\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de l'application linéaire associant à un vecteur $\vec{u}$ de l'espace le vecteur $r(\vec{u})$ obtenu par rotation de $\vec{u}$ d'un angle $\pi/3$ autour de la droite vectorielle orientée par $\vec{w}$

Solution



1) Décomposons $\vec{u}$ selon un vecteur colinéaire à $\vec{n}$ et un vecteur $\vec{u}_1$ orthogonal à $\vec{n}$

$$\vec{u} = \lambda\,\vec{n} + \vec{u}_1$$

Par produit scalaire avec $\vec{n}$ on obtient :

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = \lambda\,\vec{n}\cdot\vec{n} + \vec{u}_1\cdot\vec{n}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = \lambda\,\|\vec{n}\|^2$$

$$\lambda = \vec{u}\cdot\vec{n}$$

Donc :

$$\boxed{p(\vec{u}) = (\vec{u}\cdot\vec{n})\,\vec{n}}$$

2) On en déduit :

$$\boxed{\vec{u}_1 = \vec{u} - p(\vec{u}) = \vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{n})\,\vec{n}}$$

3)

$$\vec{u}_2 = \vec{n}\wedge\vec{u}_1 = \vec{n}\wedge(\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{n})\,\vec{n}) = \vec{n}\wedge\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{n})\,\vec{n}\wedge\vec{n}$$

D'où :

$$\boxed{\vec{u}_2 = \vec{n}\wedge\vec{u}}$$

4)

$$\vec{u}_3 = \cos(\theta)\;\vec{u}_1 + \sin(\theta)\;\vec{u}_2$$

$$\boxed{\vec{u}_3 = \cos(\theta)\;(\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{n})\,\vec{n}) + \sin(\theta)\;\vec{n}\wedge\vec{u}}$$

5)

$$r(\vec{u}) = \vec{u}_3 + p(\vec{u})$$

$$r(\vec{u}) = \cos(\theta)\ \left(\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{n})\,\vec{n}\right) + \sin(\theta)\ \vec{n}\wedge\vec{u} + (\vec{u}\cdot\vec{n})\,\vec{n}$$

$$\boxed{r(\vec{u}) = \cos(\theta)\ \vec{u} + (1-\cos(\theta))\ (\vec{u}\cdot\vec{n})\,\vec{n} + \sin(\theta)\ \vec{n}\wedge\vec{u}}$$

6) Le vecteur unitaire colinéaire et de même sens que $\vec{w}$ est :

$$\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{w}\|}\ \vec{w}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Posons :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \qquad r(\vec{u})\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

Alors :

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\times\frac{1}{\sqrt{3}}\ (x+y+z)\times\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} + \frac{1}{6}(x+y+z)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}z-y\\x-z\\y-x\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}\ x + \frac{1}{6}(x+y+z) + \frac{1}{2}\ (z-y)\\ y' = \frac{1}{2}\ y + \frac{1}{6}(x+y+z) + \frac{1}{2}\ (x-z)\\ z' = \frac{1}{2}\ z + \frac{1}{6}(x+y+z) + \frac{1}{2}\ (y-x)\end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{6}\,(4\,x - 2\,y + 4\,z) \\ y' = \dfrac{1}{6}\,(4\,x + 4\,y - 2\,z) \\ z' = \dfrac{1}{6}\,(-2\,x + 4\,y + 4\,z) \end{cases}$$

Soit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Nous pouvons vérifier que les colonnes de la matrice sont orthogonales deux à deux et de norme 1 car une rotation conserve les normes et les angles. De plus, on peut vérifier que $\vec{w}$ est bien invariant par la rotation

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$