Soient trois points mobiles $A(t), B(t), C(t)$ dont les coordonnées dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont dérivables sur un intervalle de temps, on considère la fonction $f(t)$ définie par l'aire du triangle $A(t), B(t), C(t)$

1) En notant $\vec{u}(t) = \overrightarrow{A(t)B(t)}$, $\vec{v}(t) = \overrightarrow{A(t)C(t)}$, exprimer $f(t)$ à partir de $\vec{u}(t)$ et $\vec{v}(t)$
2) En considérant le taux d'accroissement de f entre une valeur fixée de t et une valeur $t+h$ où h est variable, montrer que si $f(t)$ est non nul, f est dérivable en t et déterminer $f'(t)$ en fonction de $\vec{u}(t), \vec{v}(t), \vec{u}'(t), \vec{v}'(t)$
3) Application :

$A(t)$ est un point se déplaçant horizontalement à la vitesse de 2 unités par seconde et de position initiale $A(0) = A_0(0,2)$

$B(t)$ est un point se déplaçant verticalement à la vitesse de 3 unités par seconde et de position initiale $B(0) = B_0(5,0)$

$C(t)$ est un point se déplaçant sur la parabole d'équation $y = x^2$ et d'abscisse $t+1$

- Par la méthode de votre choix, exacte ou approchée, déterminer les valeurs de t en lesquelles f n'est pas dérivable.
- Calculer $f(t)$ et $f'(t)$ directement
- Représenter sur un graphique l'aire à $t = 0$ puis à $t = 2$ et contrôler la formule par un calcul direct

Solution

1)

$$f(t) = \frac{1}{2}\left|det\big(\vec{u}(t), \vec{v}(t)\big)\right|$$

2)

<u>1[er] cas</u> : $f(t) > 0$

Dans ce cas, pour h suffisamment proche de 0 : $f(t+h) > 0$ et on a :

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}\ det\big(\vec{u}(t+h), \vec{v}(t+h)\big) - \frac{1}{2}\ det\big(\vec{u}(t), \vec{v}(t)\big)\right)$$

$$= \frac{1}{2\,h}\Big(\ det\big(\vec{u}(t+h), \vec{v}(t+h)\big) - \ det\big(\vec{u}(t), \vec{v}(t)\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{2\,h}\Big(\ det\big(\vec{u}(t+h), \vec{v}(t+h)\big) - det\big(\vec{u}(t+h), \vec{v}(t)\big) + det\big(\vec{u}(t+h), \vec{v}(t)\big) - det\big(\vec{u}(t), \vec{v}(t)\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{2\,h}\Big(\ det\big(\vec{u}(t+h), \vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)\big) + det\big(\vec{u}(t+h) - \vec{u}(t), \vec{v}(t)\big)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ det\left(\vec{u}(t+h), \frac{\vec{v}(t+h) - \vec{v}(t)}{h}\right) + det\left(\frac{\vec{u}(t+h) - \vec{u}(t)}{h}, \vec{v}(t)\right)\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{f'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{1}{2}\Big(\ det\big(\vec{u}(t), \vec{v}'(t)\big) + det\big(\vec{u}'(t), \vec{v}(t)\big)\Big)}$$

<u>2ème cas</u> : $f(t) < 0$

Dans ce cas, pour h suffisamment proche de 0 : $f(t+h) < 0$ et on a :

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{1}{h}\left(-\frac{1}{2}\ det\big(\vec{u}(t+h), \vec{v}(t+h)\big) + \frac{1}{2}\ det\big(\vec{u}(t), \vec{v}(t)\big)\right)$$

et le même calcul que précédemment conduit à :

$$f'(t) = -\frac{1}{2}\Big(\ det\big(\vec{u}(t), \vec{v}'(t)\big) + det\big(\vec{u}'(t), \vec{v}(t)\big)\Big)$$

<u>3ème cas</u> : $f(t) = 0$

On ne peut alors pas conclure de façon générale

3) Les coordonnées des points mobiles sont :

$$A(t)\ (2\,t, 2)$$

$$B(t)\ (5, 3\,t)$$

$$C(t)\ (t+1, (t+1)^2)$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{A(t)B(t)}\ \binom{5-2\,t}{3\,t-2}$$

$$\overrightarrow{A(t)C(t)}\ \binom{1-t}{(t+1)^2-2}$$

d'où :

$$det\left(\overrightarrow{A(t)B(t)}, \overrightarrow{A(t)C(t)}\right) = \begin{vmatrix} 5-2\,t & 1-t \\ 3\,t-2 & (t+1)^2-2 \end{vmatrix}$$

$$= (5-2\,t)\,((t+1)^2-2) - (3\,t-2)\,(1-t)$$

$$= (5-2\,t)\,((t+1)^2-2) - (3\,t-2)\,(1-t)$$

$$= (5-2\,t)\,(t^2+2\,t-1) - (3\,t-3\,t^2-2+2\,t)$$

$$= 5\,t^2+10\,t-5-2\,t^3-4\,t^2+2\,t-5\,t+3\,t^2+2$$

$$= -2\,t^3+4\,t^2+7\,t-3$$

et :

$$f(t) = \frac{1}{2}\,|-2\,t^3+4\,t^2+7\,t-3\ |$$

Etudions alors le signe du polynôme :

$$P(t) = -2\,t^3+4\,t^2+7\,t-3$$

<u>1ère méthode</u> : Etude de la fonction

P est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$P'(t) = -6\,t^2+8\,t+7$$

Le discriminant est :

$$\Delta = 64 - 4\,(-6)\,(7) = 4\,(16+42) = 4 \times 58$$

Les racines de P' sont donc :

$$t_1 = \frac{-8 - 2\sqrt{58}}{-12} = \frac{4 + \sqrt{58}}{6} \approx 1{,}94$$

$$t_2 = \frac{-8 + 2\sqrt{58}}{-12} = \frac{4 - \sqrt{58}}{6} \approx -0{,}60$$

On en déduit le tableau de variations de P

t	$-\infty$		$\frac{4-\sqrt{58}}{3}$		$\frac{4+\sqrt{58}}{3}$		$+\infty$
$P'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$P(t)$		↘		↗		↘	

De plus :

$$\lim_{t\to-\infty} P(t) = +\infty \qquad \lim_{t\to+\infty} P(t) = -\infty$$

$$P\left(\frac{4-\sqrt{58}}{3}\right) \approx -5{,}3 \qquad P\left(\frac{4+\sqrt{58}}{3}\right) \approx 11{,}0$$

Donc P s'annule en une unique valeur α sur $]-\infty; t_2[$ .On trouve par encadrements successifs à la calculette, ou au tableur (je préfère personnellement ce dernier), les valeurs approchées :

$$\alpha = -1{,}37 \quad \beta = 0{,}37 \quad \gamma = 3$$

On remarque in fine que 3 est une valeur exacte, ce qui après coup permettrait de factoriser le polynôme P par $t - 3$ et en déduire les valeurs exactes de α et β

Au final, nous avons :

sur $]-\infty;\alpha[\,\cup\,]\beta;\gamma[\ :\ P(t) > 0$ donc :

$$f(t) = \frac{1}{2}\,(-2\,t^3 + 4\,t^2 + 7\,t - 3) = -\,t^3 + 2\,t^2 + \frac{7}{2}\,t - \frac{3}{2}$$

$$f'(t) = \ -3\,t^2 + 4\,t + \frac{7}{2}$$

sur $]\alpha;\beta[\,\cup\,]\gamma;+\infty[\ :\ P(t) < 0$ donc :

$$f(t) = t^3 - 2\,t^2 - \frac{7}{2}\,t + \frac{3}{2}$$

$$f'(t) = 3\,t^2 - 4\,t - \frac{7}{2}$$

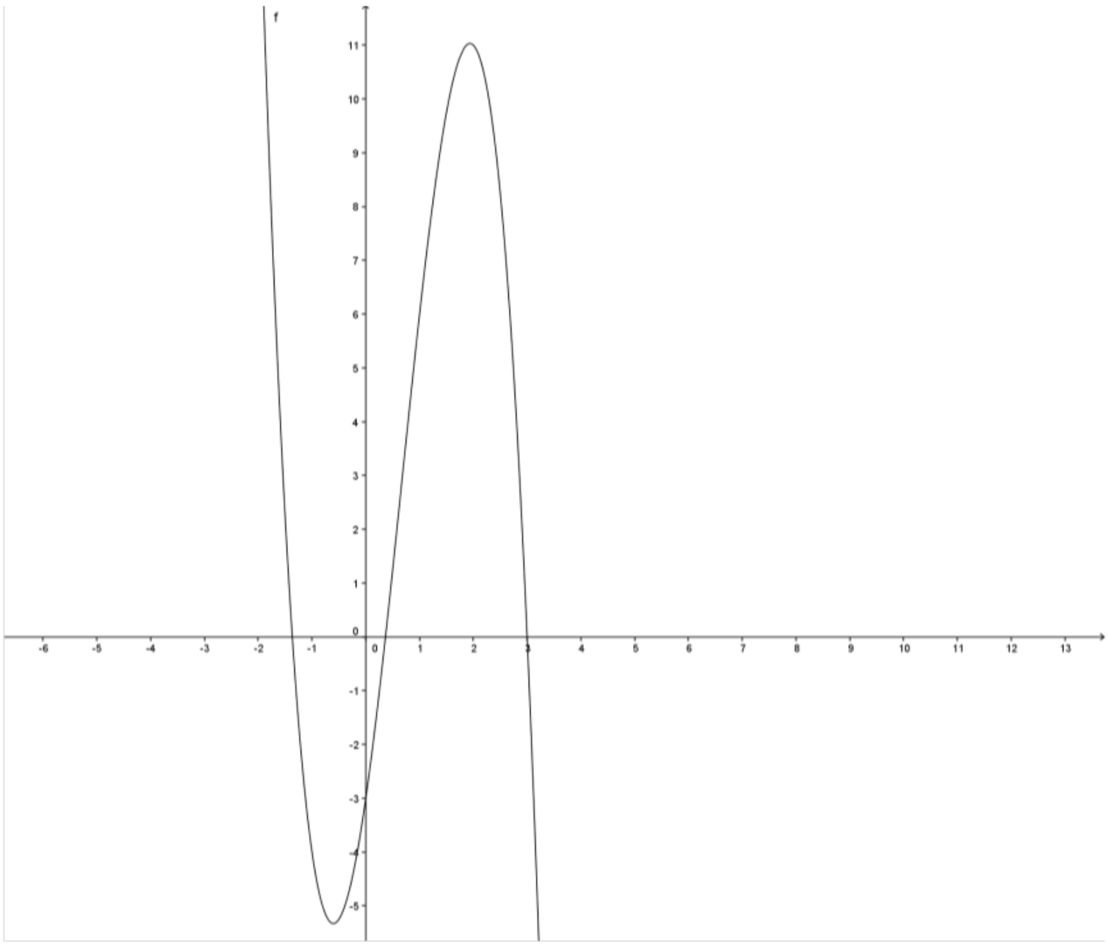
En α, β, γ la fonction f n'est pas dérivable. Il suffit de vérifier que nombres dérivés à gauche et à droite sont distincts.

2ème méthode : Utilisation d'un traceur de courbe comme Geogebra

On entre l'équation de la courbe associée au polynôme dans le champ de saisie en bas à gauche :

$$y = -2 * x^3 + 4 * x^2 + 7 * x - 3$$

On obtient la courbe suivante :

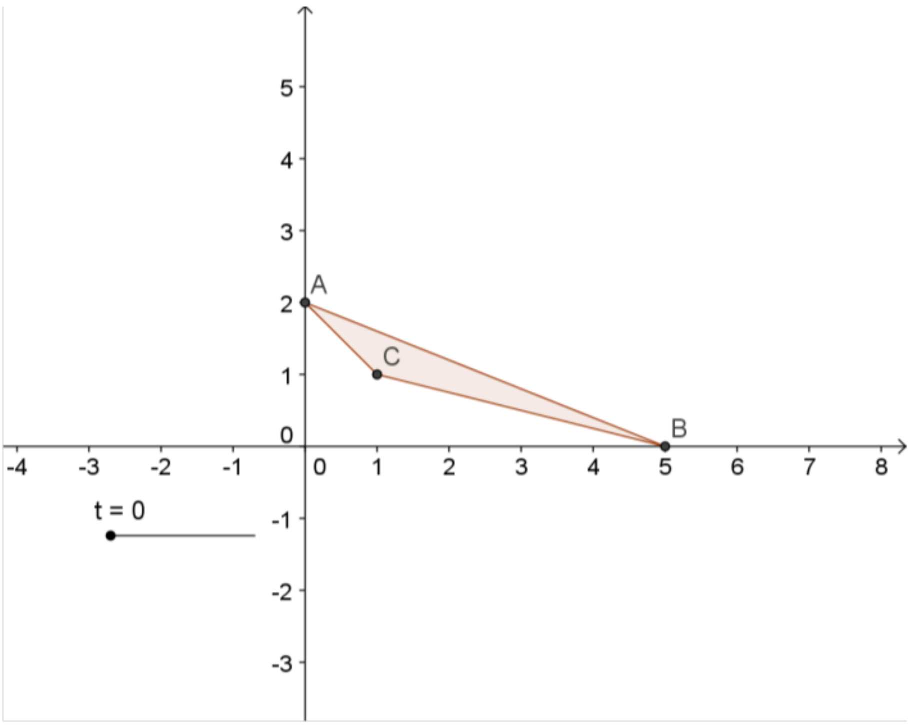


Il suffit alors de cliquer sur l’icône « Nouveau point » en haut à gauche puis de cliquer sur chacun des points de la courbe d’ordonnée nulle pour lire leur abscisse. C’est évidemment bien plus rapide que la méthode précédente, surtout dans les cas pratiques où les valeurs approchées suffisent. On peut d’ailleurs zoomer pour obtenir une lecture plus précise de ces abscisses.

Toujours avec Geogebra, nous allons visualiser nos points mobiles en créant un curseur balayant l’intervalle de temps $[0;5]$. Pour cela il faut :

- Cliquer sur l’icône curseur en haut
- Positionner le curseur sur le graphique n’importe où
- Définir comme nom t (par défaut c’est a)
- Créer les trois points mobiles, en tapant tour à tour dans la zone de saisie : $A=(2\,t,2),\ B=(5,3\,t),\ C=(t+1,(t+1)\hat{}2)$
- Cliquez sur l’icône triangle puis sur les points A, B, C
- Cliquez sur l’icône flèche en haut à gauche puis déplacez le curseur pour l’animation

Voici ce que cela donne aux instants $t=0$ et $t=2$

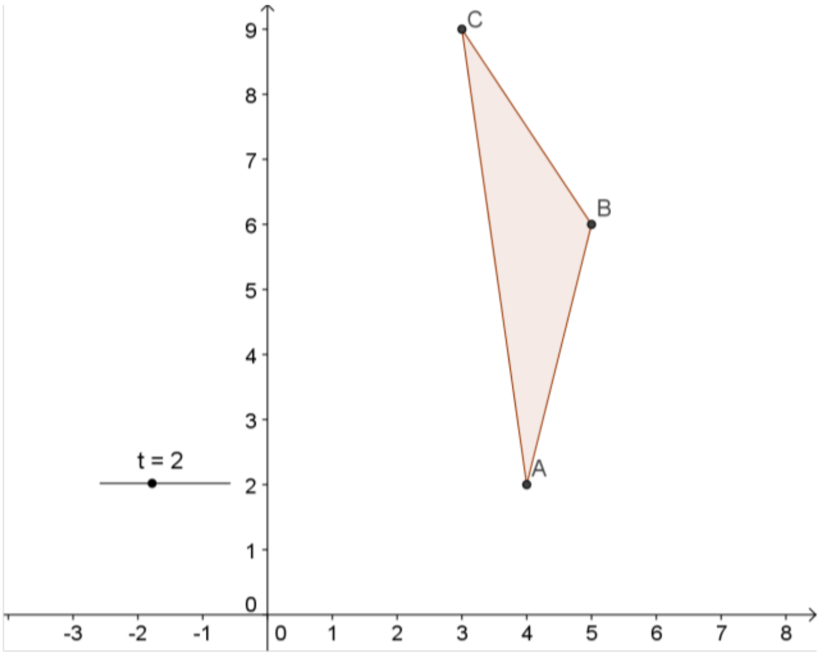


L’aire de ce triangle se calcule facilement visuellement en soustrayant à l’aire du triangle OAB l’aire d’un trapèze et d’un triangle :

$$\frac{5\times 2}{2}-\frac{(2+1)\times 1}{2}-\frac{4\times 1}{2}=\frac{3}{2}$$

Et on a bien

$$f(0) = \frac{3}{2}$$



L'aire se calcule en soustrayant un trapèze à deux triangles :

$$\frac{(7+4)\times 2}{2} - \frac{1\times 7}{2} - \frac{1\times 4}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

et :

$$f(2) = -2^3 + 2\times\ 2^2 + \frac{7}{2}\times 2 - \frac{3}{2} = 5{,}5$$