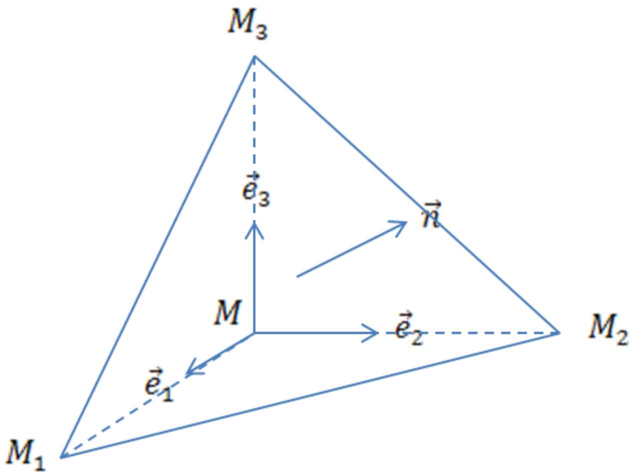
Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère orthonormé de l'espace, $M(x_1, x_2, x_3)$ un point donné. On définit au point M un tétraèdre, de la façon suivante :

On place un point $M_1(x_1 + h, x_2, x_3)$ sur l'axe $(M, \vec{e}_1)$, un point $M_2(x_1, x_2 + k, x_3)$ sur l'axe $(M, \vec{e}_2)$ et point $M_3(x_1, x_2, x_3 + l)$ sur l'axe $(M, \vec{e}_3)$.



On note :

S_1 l'aire de la facette triangulaire $M\ M_2\ M_3$

S_2 l'aire de la facette triangulaire $M\ M_1\ M_3$

S_3 l'aire de la facette triangulaire $M\ M_1\ M_2$

S l'aire de la facette triangulaire $M_1\ M_2\ M_3$

$\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à la facette $M_1\ M_2\ M_3$ et pointant vers l'extérieur du tétraèdre

1) Exprimer S_1, S_2, S_3 en fonction de h, k, l
2) Exprimer de deux façons le produit vectoriel $\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}$
3) En déduire les coordonnées $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ de $\vec{n}$ en fonction de S_1, S_2, S_3, S
4) Exprimer S et V en fonction de h, k, l
5) En déduire le rapport V/S en fonction de h, k, l
6) En supposant que h, k, l sont trois fonctions d'une variable t qui tendent vers 0 quand t tend vers 0, auquel cas, S_1, S_2, S_3, S, V sont des fonctions de t, montrer que l'on a :

$$\lim_{t \to 0} \frac{V(t)}{S(t)} = 0$$

Une application de cette propriété est donnée dans le fichier intitulé « Le vecteur contrainte en mécanique des milieux continus » à la rubrique « Sciences physiques »

<u>Solution</u> :

1)

$$S_1 = \frac{1}{2}\ k\ l$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\ h\ l$$

$$S_3 = \frac{1}{2}\ h\ k$$

2)

$$\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3} = 2\ S\ \vec{n}$$

Or :

$$\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3} \begin{pmatrix} -h \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\ l \\ h\ l \\ h\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ S_1 \\ 2\ S_2 \\ 2\ S_3 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\vec{n} \begin{pmatrix} \alpha_1 = \dfrac{S_1}{S} \\ \alpha_2 = \dfrac{S_2}{S} \\ \alpha_3 = \dfrac{S_3}{S} \end{pmatrix}$$

3)

$$S = \frac{1}{2}\ \left\|\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}\right\| = \frac{1}{2}\ \sqrt{(k\ l)^2 + (h\ l)^2 + (h\ k)^2}$$

$$V = \frac{1}{3}\ \ S_3\ l = \frac{1}{6}\ \ h\ k\ l$$

Donc :

$$\frac{V}{S} = \frac{\frac{1}{6}\ \ h\ k\ l}{\frac{1}{2}\ \sqrt{(k\ l)^2 + (h\ l)^2 + (h\ k)^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{h^2\ k^2\ l^2}{k^2\ l^2 + h^2\ l^2 + h^2\ k^2}}$$

4) On a :

$$\frac{V(t)}{S(t)} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{h(t)^2} + \frac{1}{k(t)^2} + \frac{1}{l(t)^2}}}$$

Ainsi :

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{h(t)^2} + \frac{1}{k(t)^2} + \frac{1}{l(t)^2}\right) = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{t\to 0}\frac{V(t)}{S(t)} = 0$$