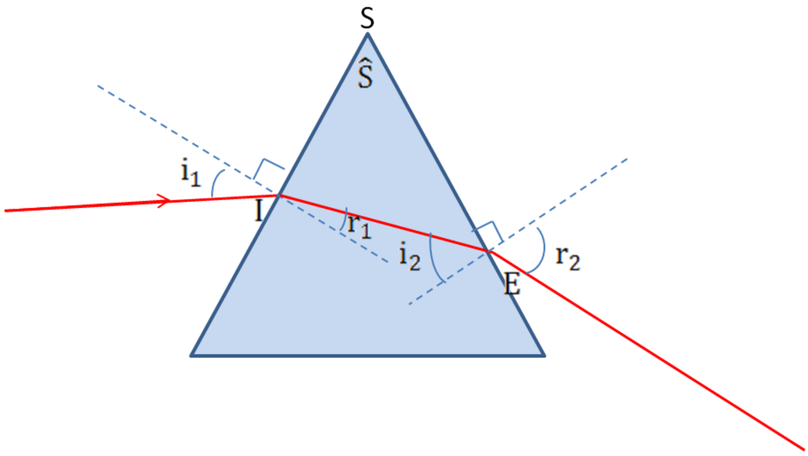
Analyse quantitative de la réfraction de la lumière par un prisme

Nous avons observé en TP qu'un rayon monochromatique, entrant dans un prisme en un point d'entrée I sous un angle i_1 par rapport à la normale au plan tangent en ce point, voyait sa course déviée en un rayon réfracté (portion IE sur le schéma) faisant un angle $\mathrm{r}_1$par rapport à la même normale et situé dans le plan d'incidence (plan formé par la normale et le rayon incident).Ce rayon réfracté se voyait à son tour dévié en sortant du prisme en un point E, faisant passer son angle d'incidence i_2 par rapport à la normale au plan tangent en ce point, à un angle réfracté r_2 par rapport à cette même normale (voir schéma).



Questions :

1) Appliquer la 2ème loi de Snell-Descartes à l'interface d'entrée (point I) pour en déduire l'angle $\mathrm{r}_1$en fonction de l'angle i_1 et de l'indice de réfraction n du prisme pour la radiation monochromatique considérée.
2) En écrivant que la somme des angles du triangle $\mathrm{I\,E\,S}$ vaut 180°, en déduire l'angle i_2 en fonction de l'angle au sommet $\hat{\mathrm{S}}$ du prisme et de l'angle r_1.
3) Appliquer la 2ème loi de Snell-Descartes à l'interface de sortie (point E) pour en déduire l'angle $\mathrm{r}_2$en fonction de l'angle i_2 et de l'indice de réfraction n du prisme pour la radiation monochromatique considérée.
4) Remplir le tableau suivant pour différentes valeurs de l'angle d'incidence i_1. On prendra pour données : $\hat{\mathrm{S}} = 60°, \mathrm{n} = 1{,}5$

i_1 (degrés)	60°	50°	45°	40°	35°	30°	20°
r_1 (degrés)							
i_2 (degrés)							
r_2 (degrés)							

5) Déterminer l'angle limite i_1 à partir duquel le rayon IE ne se réfracte plus mais se réfléchit dans le prisme au point E avant de se réfracter en un point de la base du prisme
6) Comment changer la couleur du rayon incident pour que l'indice de réfraction soit plus élevé ? r_2 est il alors plus grand ou plus petit que dans la situation précédente ? Quel phénomène observe-t-on alors pour un rayon incident de lumière blanche ?

Correction

1) L'interface d'entrée sépare deux milieux transparents, l'un constitué d'air d'indice de réfraction égal à 1,00 quelque soit la radiation monochromatique considérée et l'autre constitué d'un verre d'indice n pour la radiation rouge concernée. La deuxième loi de Snell Descartes s'écrit alors :

$$1{,}00\ \sin(\mathrm{i}_1) = \mathrm{n}\sin(\mathrm{r}_1)$$

soit :

$$\sin(\mathrm{r}_1) = \frac{\sin(\mathrm{i}_1)}{\mathrm{n}}$$

ou encore :

$$\boxed{\mathrm{r}_1 = \sin^{-1}\left(\frac{\sin(\mathrm{i}_1)}{\mathrm{n}}\right)}$$

2) Notons que l'on a :

$$\widehat{\mathrm{SIE}} = 90° - \mathrm{r}_1$$

$$\widehat{\mathrm{SEI}} = 90° - \mathrm{i}_2$$

Ecrivons alors que la somme des angles du triangle $\mathrm{I\ E\ S}$ vaut 180° :

$$90° - \mathrm{i}_1 + 90° - \mathrm{i}_2 + \hat{\mathrm{S}} = 180°$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\mathrm{i}_2 = \hat{\mathrm{S}} - \mathrm{r}_1 = \hat{\mathrm{S}} - \sin^{-1}\left(\frac{\sin(\mathrm{i}_1)}{\mathrm{n}}\right)}$$

3) A l'interface de sortie la deuxième loi de Descartes s'écrit :

$$\mathrm{n}\ \sin(\mathrm{i}_2) = 1{,}00\sin(\mathrm{r}_2)$$

soit :

$$\sin(\mathrm{r}_2) = \mathrm{n}\ \sin(\mathrm{i}_2)$$

ou encore :

$$\boxed{\mathrm{r}_2 = \sin^{-1}(\mathrm{n}\ \sin(\mathrm{i}_2))}$$

Et en faisant une seule formule :

$$\boxed{\mathrm{r}_2 = \sin^{-1}\left(\mathrm{n}\ \sin\left(\hat{\mathrm{S}} - \sin^{-1}\left(\frac{\sin(\mathrm{i}_1)}{\mathrm{n}}\right)\right)\right)}$$

4) Cette formule permet de remplir le tableau

i_1 (degrés)	60°	50°	45°	40°	35°	30°	20°
r_1 (degrés)	35,3	30,7	28,1	25,4	22,5	19,5	13,2
i_2 (degrés)	24,7	29,3	31,9	34,6	37,5	40,5	46,8
r_2 (degrés)	38,9	47,2	52,4	58,5	66,0	77,1	impossible

5) Le rayon se réfléchit en E lorsque r_2 atteint la valeur limite de 90°. On peut alors remonter jusqu'à l'angle incident i_1 qui produit une telle déviation :

$$\sin(i_2) = \frac{\sin(r_2)}{n} = \frac{\sin(90°)}{1{,}5} = \frac{1}{1{,}5}$$

$$i_2 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{1{,}5}\right) \approx 41{,}81°$$

$$r_1 = \hat{S} - i_2 = 60 - 41{,}81 = 18{,}19°$$

$$\sin(i_1) = 1{,}5\sin(r_1) = 1{,}5 \times \sin(18{,}19°) \approx 0{,}468$$

$$i_1 \approx \sin^{-1}(0{,}468) \approx 27{,}9°$$

Plus élégant est de constater que la relation obtenue en 3) est valable en échangeant i_1 et r_2 soit :

$$\boxed{i_1 = \sin^{-1}\left(n\ \sin\left(\hat{S} - \sin^{-1}\left(\frac{\sin(r_2)}{n}\right)\right)\right)}$$

Qui donne pour $r_2 = 90°$

$$i_1 = \sin^{-1}\left(n\ \sin\left(\hat{S} - \sin^{-1}\left(\frac{1}{1{,}5}\right)\right)\right) \approx 27{,}9°$$