Polynôme trigonométrique

Enoncé

On considère pour $\boldsymbol{\theta} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ l'expression :

$$\boldsymbol{P(\theta) = \frac{sin(4\,n\,\theta)}{sin(\theta)\,cos(\theta)}}$$

1) **Développer $\boldsymbol{P(\theta)}$ sous la forme d'un polynôme en $\boldsymbol{cos^2(\theta)}$**
2) **En déduire pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$:**

$$\boldsymbol{\prod_{k=1}^{2\,n-1} cos^2\left(\frac{k\,\pi}{4\,n}\right) = \frac{n}{2^{4\,n-3}}}$$

Corrigé :

1) Introduisons une expression complexe dont $P(\theta)$ est la partie imaginaire :

$$Q(\theta) = \frac{e^{i\,4\,n\,\theta}}{sin(\theta)\,cos(\theta)} = \frac{1}{sin(\theta)\,cos(\theta)}\,\big(cos(\theta) + i\,sin(\theta)\big)^{4\,n} = \frac{1}{sin(\theta)\,cos(\theta)} \sum_{k=0}^{4\,n} \binom{4\,n}{k}\,cos^{4\,n-k}(\theta)\,i^k\,sin^k(\theta)$$

Prenons la partie imaginaire en ne retenant dans la somme que les termes d'indice k impair, c'est-à-dire de la forme $k = 2\,q + 1$ avec :

$$0 \leq 2\,q + 1 \leq 4\,n$$

Soit :

$$0 \leq q \leq 2\,n - 1$$

Il vient :

$$P(\theta) = \frac{1}{sin(\theta)\,cos(\theta)} \sum_{q=0}^{2\,n-1} \binom{4\,n}{2\,q+1}\,cos^{4\,n-2\,q-1}(\theta)\,i^{2\,q+1}\,sin^{2\,q+1}(\theta)$$

$$= \sum_{q=0}^{2\,n-1} \binom{4\,n}{2\,q+1}\,cos^{4\,n-2\,q-2}(\theta)\,(-1)^q\,\big(sin^2(\theta)\big)^q$$

$$= \sum_{q=0}^{2\,n-1} \binom{4\,n}{2\,q+1}\,\big(cos^2(\theta)\big)^{2\,n-1-q}\,(-1)^q\,\big(1 - cos^2(\theta)\big)^q$$

$$= \sum_{q=0}^{2\,n-1} \binom{4\,n}{2\,q+1}\,\big(cos^2(\theta)\big)^{2\,n-1-q}(cos^2(\theta) - 1)^q$$

Introduisons alors le polynôme à coefficients réels :

$$R(X) = \sum_{q=0}^{2\,n-1} \binom{4\,n}{2\,q+1} X^{2\,n-1-q}\,(X-1)^q$$

Ce polynôme est de degré $2\,n-1$ et a pour coefficients dominant et de plus bas degré :

$$r_{2n-1} = \sum_{q=0}^{2\,n-1} \binom{4\,n}{2\,q+1} = 2^{4\,n-1}$$

$$r_0 = (-1)^{2\,n-1} \binom{4\,n}{4\,n-1} = -4\,n =$$

Et de plus, sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$: $P(\theta) = R\big(cos^2(\theta)\big)$

Or, pour $k \in [\![1,2\,n-1]\!]$:

$$sin\left(4\,n\frac{k\,\pi}{4\,n}\right) = sin(k\,\pi) = 0$$

donc

$$P\left(\frac{k\,\pi}{4\,n}\right) = 0$$

D'où :

$$R\left(cos^2\left(\frac{k\,\pi}{4\,n}\right)\right) = 0$$

Donc, les $2\,n-1$ valeurs $\lambda_k = cos^2\left(\frac{k\,\pi}{4\,n}\right)$ pour $k \in [\![1,2\,n-1]\!]$ forment les $2\,n-1$ racines distinctes de $R(X)$. Ainsi :

$$R(X) = r_{2n-1} \prod_{k=1}^{2\,n-1} (X-\lambda_k)$$

Et :

$$(-1)^{2\,n-1}\,r_{2n-1} \prod_{k=1}^{2\,n-1} (X-\lambda_k) = r_0$$

D'où :

$$\prod_{k=1}^{2\,n-1} cos^2\left(\frac{k\,\pi}{4\,n}\right) = \prod_{k=1}^{2\,n-1} (X-\lambda_k) = -\frac{r_0}{r_{2n-1}} = \frac{4\,n}{2^{4\,n-1}} = \frac{n}{2^{4\,n-3}}$$