Polynômes interpolateurs

Enoncé :

Soit $\mathbb{R}_2[X] = Vect[1, X, X^2]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1) Montrer que la famille $[X(X-1), X(X+1), (X-1)(X+1)]$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$
2) Déterminer les coordonnées du polynôme $X^2 + X + 1$ dans cette base

On se place ensuite dans $\mathbb{R}_3[X] = Vect[1, X, X^2, X^3]$ et on considère quatre réels distincts $a < b < c < d$

3) Montrer que la famille $[(X-a)(X-b)(X-c), (X-a)(X-b)(X-d), (X-a)(X-c)(X-d), (X-b)(X-c)(X-d)]$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$
4) Déterminer les coordonnées d'un polynôme quelconque $P(X)$ dans cette base
5) Application : Déterminer le polynôme de degré 3 dont la courbe représentative passe par les points $A(-1,1), B(0,-1), C(1,2), D(3,0)$
6) Tracer la courbe en repère orthonormé (on fera apparaitre le centre de symétrie après en avoir calculé les coordonnées)

On se place finalement dans $\mathbb{R}_n[X] = Vect[1, X, X^2, \dots, X^n]$ et on considère $n+1$ réels distincts $a_0 < a_2 < \cdots < a_n$

7) Proposer une généralisation de ce qui précède en déterminant une nouvelle base ainsi que les coordonnées d'un polynôme quelconque dans cette base.

Solution :

1) Partons d'une combinaison linéaire nulle :

$$\alpha\, X(X-1) + \beta\, X(X+1) + \gamma\, (X-1)(X+1) = 0$$

Alors, pour tout réel x :

$$\alpha\, x(x-1) + \beta\, x(x+1) + \gamma\, (x-1)(x+1) = 0$$

En particulier, pour $x = 0, x = 1, x = -1$ cela donne :

$$\begin{cases} -\gamma = 0 \\ 2\,\beta = 0 \\ 2\,\alpha = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

La famille est donc libre et donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$

2) Posons :

$$P(X) = \alpha\, X(X-1) + \beta\, X(X+1) + \gamma\, (X-1)(X+1)$$

Alors, pour tout réel x :

$$P(x) = \alpha\, x(x-1) + \beta\, x(x+1) + \gamma\, (x-1)(x+1)$$

En particulier, pour $x = 0, x = 1, x = -1$ cela donne :

$$\begin{cases} P(0) - \gamma \\ P(1) = 2\,\beta \\ P(-1) = 2\,\alpha \end{cases}$$

Ainsi :

$$P(X) = \frac{P(-1)}{2}\, X(X-1) + \frac{P(1)}{2}\, X(X+1) - P(0)\, (X-1)(X+1)$$

Appliquons cela à $P(X) = X^2 + X + 1$

$$X^2 + X + 1 = \frac{1}{2}\, X(X-1) + \frac{3}{2}\, X(X+1) - \ (X-1)(X+1)$$

3) Partons d'une combinaison linéaire nulle :

$$\alpha\, (X-a)(X-b)(X-c) + \beta\, (X-a)(X-b)(X-d) + \gamma\, (X-a)(X-c)(X-d) \\ + \delta\, (X-b)(X-c)(X-d) = 0$$

Alors, pour tout réel x :

$$\alpha\, (x-a)(x-b)(x-c) + \beta\, (x-a)(x-b)(x-d) + \gamma\, (x-a)(x-c)(x-d) \\ + \delta\, (x-b)(x-c)(x-d) = 0$$

En particulier, pour $x = a, x = b, x = c, x = d$ cela donne :

$$\begin{cases} \delta\, (a-b)(a-c)(a-d) = 0 \\ \gamma\, (b-a)(b-c)(b-d) = 0 \\ \beta\, (c-a)(c-b)(c-d) = 0 \\ \alpha\, (d-a)(d-b)(d-c) = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$$

La famille est donc libre et donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$

4) En procédant comme au 2) on obtient :

$$P(X) = P(d)\ \frac{(X-a)(X-b)(X-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + P(c)\ \frac{(X-a)(X-b)(X-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)}$$
$$+ P(b)\ \frac{(X-a)(X-c)(X-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + P(a)\ \frac{(X-b)(X-c)(X-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$

5) On applique la formule ci-dessus avec :

$$a = -1, b = 0, c = 1, d = 3$$

$$P(a) = 1, P(b) = -1, P(c) = 2, P(d) = 0$$

$$P(X) = 2\ \frac{(X+1)X(X-3)}{2 \times 1 \times (-2)} - \frac{(X+1)(X-1)(X-3)}{1 \times (-1) \times (-3)} + \frac{X\ (X-1)(X-3)}{(-1)(-2)(-4)}$$

$$= -\frac{1}{2}\ (X^2 + X)(X-3) - \frac{1}{3}\ (X^2 - 1)(X-3) - \frac{1}{8}(X^2 - X)(X-3)$$

$$= -\frac{1}{2}\ X^3 +\ X^2 + \frac{3}{2}X - \frac{1}{3}\ X^3 +\ X^2 + \frac{1}{3}\ X - 1 - \frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{8}X$$

$$= -\frac{1}{2}\ X^3 +\ X^2 + \frac{3}{2}X - \frac{1}{3}\ X^3 +\ X^2 + \frac{1}{3}\ X - 1 - \frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{8}X$$

$$= -\frac{23}{24}X^3 + \frac{5}{2}X^2 + \frac{35}{24}\ X - 1$$

On vérifie au passage que l'on a bien

$$P(-1) = 1, P(0) = -1, P(1) = 2, P(3) = 0$$

6) La courbe a une équation de la forme :

$$y = a\ X^3 + b\ X^2 +\ X - 1$$

Avec :

$$a = -\frac{23}{24}, b = \frac{5}{2}, c = \frac{35}{24}, d = -1$$

Le centre de symétrie Ω a pour coordonnées :

$$\left(\alpha = -\frac{b}{3\ a}, \beta = P(\alpha)\right)$$

Soit :

$$\alpha = -\frac{1}{3} \times \frac{5}{2} \times \left(-\frac{24}{23}\right) = \frac{20}{23}$$

Pour le calcul de β notons que :

$$P(X) = X\left(X\left(-\frac{23}{24}X + \frac{5}{2}\right) + \frac{35}{24}\right) - 1$$

Ainsi :

$$P\left(\frac{20}{23}\right) = \frac{20}{23}\left(\frac{20}{23}\left(-\frac{23}{24} \times \frac{20}{23} + \frac{5}{2}\right) + \frac{35}{24}\right) - 1$$

$$= \frac{20}{23}\left(\frac{20}{23}\left(-\frac{5}{6} + \frac{5}{2}\right) + \frac{35}{24}\right) - 1$$

$$= \frac{20}{23}\left(\frac{20}{23} \times \frac{5}{3} + \frac{35}{24}\right) - 1$$

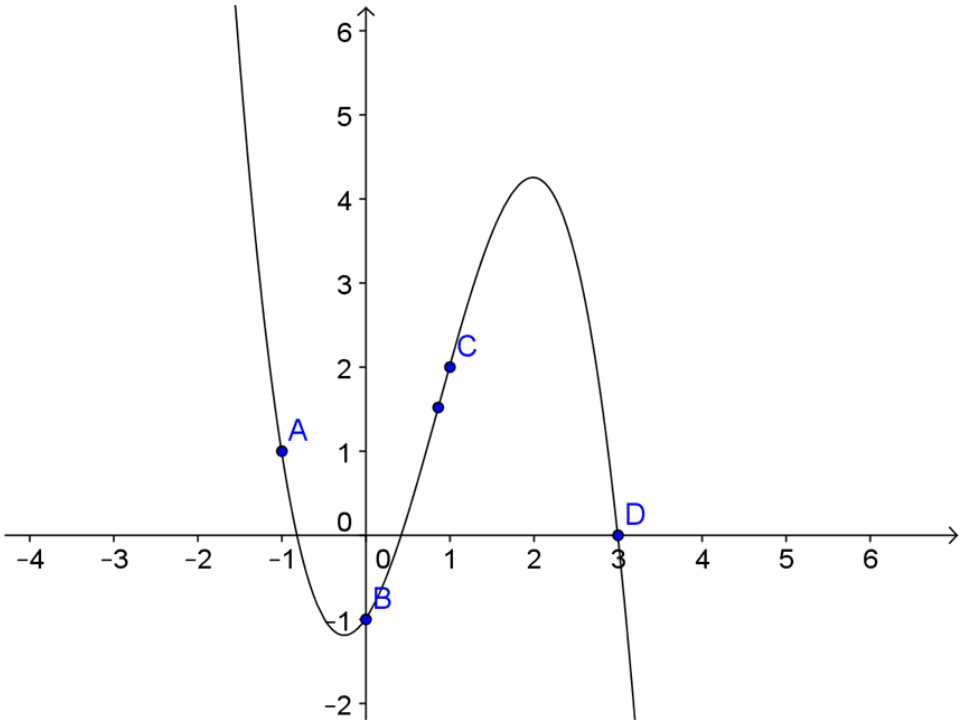
$$\frac{20}{23}\left(\frac{100}{69} + \frac{35}{24}\right) - 1 = \frac{20}{23} \times \frac{4815}{69 \times 24} - 1 = \frac{5}{23} \times \frac{4815}{69 \times 6} - 1$$

$$= \frac{24075}{9522} - 1 = \frac{14553}{9522}$$

D'où :

$$\Omega\left(\frac{20}{23}, \frac{14553}{9522}\right)$$

6) Voici l'allure de la courbe :



7) La généralisation est que la famille suivante est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

$$\left(\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(X-a_j)\right)_{i=0,..,n}$$

Et tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ se décompose ainsi dans cette base :

$$P(X)=\sum_{i=0}^{n}\left(P(a_i)\,\frac{\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(X-a_j)}{\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(a_i-a_j)}\right)$$