Enoncé :

Démontrer que pour tout $\boldsymbol{P} \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{n}}[\boldsymbol{X}]$ il existe un unique polynôme $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{C}_{\boldsymbol{n}}[\boldsymbol{X}]$ tel que :

$$\boldsymbol{P} = \sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\boldsymbol{Q}^{(\boldsymbol{k})}}{\boldsymbol{k}!}$$

Déterminer le polynôme $\boldsymbol{Q}$ pour $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{1} + \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{2}}$ de $\mathbb{C}_2[\boldsymbol{X}]$

Réponse :

Préliminaire :

$$X^{i^{(0)}} = X^i$$

$$X^{i^{(1)}} = i\, X^{i-1}$$

$$X^{i^{(2)}} = i\,(i-1)\, X^{i-2}$$

$$\vdots$$

$$X^{i^{(k)}} = i\,(i-1)\,\ldots.\big(i-(k-1)\big)\, X^{i-k}$$

$$\vdots$$

$$X^{i^{(i)}} = i\,(i-1)\,\ldots.1 = i!$$

Donc :

$$\forall\, i \in \mathbb{N}, \forall\, k \in [\![0, i]\!] :\ X^{i^{(k)}} = \frac{i!}{(i-k)!}\, X^{i-k}$$

Posons :

$$P = \sum_{i=0}^{n} p_i\, X^i\,, \qquad Q = \sum_{i=0}^{n} q_i\, X^i$$

Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n} q_i\, X^{i^{(k)}} = \sum_{i=0}^{n} q_i \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\ X^{i^{(k)}} = \sum_{i=0}^{n} q_i \sum_{k=0}^{i} \frac{i!}{k!\ (i-k)!}\ X^{i-k}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} q_i \sum_{k=0}^{i} \frac{i!}{(i-k)!\ i!}\ X^i = \sum_{i=0}^{n} q_i \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} X^i$$

Posons pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$P_i = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} X^i$$

Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}}{k!} = \sum_{i=0}^{n} q_i \ P_i$$

La famille $(P_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est échelonnée, elle est donc libre et forme donc une base de $\mathbb{C}_n[X]$. Tout polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ se décompose donc de manière unique sur cette base.

Trouver le polynôme Q revient donc à résoudre le système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & & n \\ \vdots & 0 & 1 & 3 & & \vdots \\ & \vdots & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ \\ \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ \\ \\ p_n \end{pmatrix}$$

Ainsi pour $P = 1 + X + X^2 + X^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q_0 + q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ q_1 + 2\,q_2 + 3\,q_3 = 1 \\ q_2 + 3\,q_3 = 1 \\ q_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q_0 = 0 \\ q_1 = 2 \\ q_2 = -2 \\ q_3 = 1 \end{cases}$$

Donc :

$$Q = 2\,X - 2\,X^2 + X^3$$

$$Q^{(1)} = 2 - 4\,X + 3\,X^2$$

$$Q^{(2)} = -4 + 6\,X$$

$$Q^{(3)} = 6$$

On vérifie bien :

$$\frac{Q^{(0)}}{0!} + \frac{Q^{(1)}}{1!} + \frac{Q^{(2)}}{2!} + \frac{Q^{(3)}}{3!} = (2\,X - 2\,X^2 + X^3) + (2 - 4\,X + 3\,X^2) + (-2 + 3\,X) + 1$$

$$= 1 + X + X^2 + X^3$$