Racines carrées d'une matrice

Enoncé :

On se propose de résoudre, dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, le problème suivant :

$$M^2 = A$$

1) Pour commencer, nous allons nous placer dans le cas $n = 3$ et pour une matrice A diagonalisable d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A
b) En déduire une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que :

$$A = P\ D\ P^{-1}$$

c) Calculer P^{-1}
d) Montrer que pour toute matrice M carrée d'ordre 3, il existe une unique matrice N carrée d'ordre 3 telle que $M = P\ N\ P^{-1}$ et exprimer M^2 en fonction de N et P
e) En déduire, si $M^2 = A$, l'équation vérifiée par N, puis que N commute avec D, enfin que N est une matrice diagonale et en déduire N
f) Donner alors toutes les solutions de l'équation $M^2 = A$

2) En s'inspirant du 1) résoudre l'équation $M^2 = A$ dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n dans le cas où A peut se mettre sous la forme $P\ D\ P^{-1}$ avec P inversible et D diagonale (ce qui sera le cas des matrices diagonalisables)

Solution :

1)
a) Nous avons :

$$A - \lambda\, I_3 = \begin{pmatrix} (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 1 & (1-\lambda) & 1 \\ 1 & 2 & (2-\lambda) \end{pmatrix}$$

Cette matrice a même rang et même noyau que celle obtenue par échange des lignes 1 et 2

$$\begin{pmatrix} 1 & (1-\lambda) & 1 \\ (1-\lambda) & 0 & 0 \\ 1 & 2 & (2-\lambda) \end{pmatrix}$$

Puis que celle obtenue par combinaison des lignes 1 et 2 avec les facteurs respectifs $-(1-\lambda)$ et 1 puis combinaison des lignes 1 et 3 avec les facteurs respectifs 1 et -1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & (1-\lambda) & 1 \\ 0 & -(1-\lambda)^2 & -(1-\lambda) \\ 0 & (-1-\lambda) & (-1+\lambda) \end{pmatrix}$$

Puis, dans le cas $\lambda \neq 1$, que celle obtenue par combinaison des lignes 2 et 3 avec les facteurs respectifs $(-1-\lambda)$ et $(1-\lambda)^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & (1-\lambda) & 1 \\ 0 & -(1-\lambda)^2 & -(1-\lambda) \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$$

Avec :

$$P(\lambda) = -(1-\lambda)\,(-1-\lambda) + (1-\lambda)^2(-1+\lambda)$$

$$= (1-\lambda)\,\big((1+\lambda) + (1-\lambda)\,(-1+\lambda)\big)$$

$$= (1-\lambda)\,(1+\lambda-1+2\,\lambda-\lambda^2)$$

$$= \lambda\,(1-\lambda)\,(3-\lambda)$$

Et dans le cas $\lambda = 1$ que celle-ci :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Qui est de rang 2 car ses colonnes 1 et 3 sont égales et les colonnes 1 et 2 sont libres.

Les valeurs propres de A sont donc 0,1, 3. Déterminons les sous espaces propres associés.

Pour $\lambda = 0$ on résout :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases}$$

Donc :

$$\mathbb{E}_0 = Vect\left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Pour $\lambda = 1$ on résout :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \qquad + \ z = 0 \\ -2\,y \qquad = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\mathbb{E}_1 = Vect\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Pour $\lambda = 3$ on résout :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2\,y + z = 0 \\ -4y + 2\,z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 2\,y \end{cases}$$

Donc :

$$\mathbb{E}_3 = Vect\left[\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right]$$

b) On pose :

$$P = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\-1 & 0 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Et on a :

$$A = P\ D\ P^{-1}$$

c) Pour inverser P, on résout le système :

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\-1 & 0 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y = x' \\ -x + z = y' \\ x + y + 2\,z = z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x' \\ -x + z = y' \\ x + 2\,z = x' + z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x' \\ -x + z = y' \\ 3\,z = x' + y' + z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x' \\ x = \frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}\,y' + \frac{1}{3}\,z' - y' \\ z = \frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}\,y' + \frac{1}{3}\,z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}\,y' + \frac{1}{3}\,z' \\ y = -\frac{3}{3}x' + 0\,y' + 0\,z' \\ z = \frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}\,y' + \frac{1}{3}\,z' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\-3 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie au passage : $P^{-1}\,P = I_3$

d) On a

$$M = P\,N\,P^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}\,M\,P = N$$

Et alors :

$$M^2 = (P\,N\,P^{-1})\,(P\,N\,P^{-1}) = P\,N\,(P^{-1}\,P)\,N\,P^{-1} = P\,N\,I_3\,N\,P^{-1} = P\,N^2\,P^{-1}$$

e) si $M^2 = A$ alors on a :

$$P\,N^2\,P^{-1} = P\,D\,P^{-1}$$

Donc :

$$N^2 = D$$

Donc :

$$D\,N = N^2\,N = N\,N^2 = N\,D$$

Posons $N = (n_{ij})$ alors :

$$N\,D = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n_{12} & 3\,n_{13} \\ 0 & n_{22} & 3\,n_{23} \\ 0 & n_{32} & 3\,n_{33} \end{pmatrix}$$

$$D\,N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ 3\,n_{31} & 3\,n_{32} & 3\,n_{33} \end{pmatrix}$$

L'égalité des deux matrices montre que l'on a :

$$n_{12} = n_{13} = n_{21} = n_{23} = n_{31} = n_{32} = 0$$

Et donc que N est diagonale.

f) Les solutions pour N sont :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Et celles pour M sont les quatre matrices $P\,N\,P^{-1}$ formées avec ces solutions. Ainsi la première est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -3 + 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

2) Pour toute matrice carrée d'ordre M il existe une unique matrice N telle que :

$$M = P\,N\,P^{-1}$$

Si $M^2 = A$ alors $N^2 = D$ et $N\,D = D\,N$ donc N diagonale. Si D a des éléments diagonaux strictement négatifs, il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}_n[X]$ mais il y en a dans $\mathbb{C}_n[X]$. Sinon les éléments diagonaux de N sont les racines carrées ou leurs opposés des éléments diagonaux de D. Dans le cas où tous les éléments diagonaux de D sont strictement positifs, il y a donc 2^n solutions pour N et donc pour M