Résoudre l'équation différentielle suivante en déterminant les solutions maximales

$$2x e^y y' + e^y - x^2 = 0$$

Solution :

$$2x e^y y' + e^y - x^2 = 0 \quad (E)$$

On pose :

$$z = e^y$$

Donc :

$$z' = e^y y'$$

y est solution de (E) si et seulement si z est solution de :

$$2x z' + z - x^2 = 0$$

sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ l'équation équivaut à :

$$z' = -\frac{1}{2x} z + \frac{1}{2} x$$

Posons :

$$a(x) = -\frac{1}{2x}$$

Une primitive est :

$$A(x) = \text{Ln} \left(\frac{1}{\sqrt{|x|}} \right)$$

La solution générale de l'équation homogène associée est donc sur chaque sous intervalle :

$$z = C e^{A(x)} = \frac{C}{\sqrt{|x|}}, C \in \mathbb{R}$$

Pour la solution particulière de l'équation complète, on peut utiliser la méthode de la variation de la constante mais il est plus judicieux de chercher une solution de la forme :

$$z_p = a x^2$$

$$z'_p = 2 a x$$

qui est solution sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel x :

$$2x(2ax) + ax^2 - x^2 = 0$$

Ce qui équivaut à :

$$a = \frac{1}{5}$$

La solution générale est donc sur chaque sous intervalle :

$$z = \frac{C}{\sqrt{|x|}} + \frac{1}{5} x^2, C \in \mathbb{R}$$

La seule solution sur $\mathbb{R}$ étant :

$$z = \frac{1}{5} x^2$$

D'où les solutions maximales :

$$\text{sur }]0, +\infty[: y = \text{Ln} \left(\frac{1}{5} x^2 + \frac{C}{\sqrt{x}} \right), C > 0$$

$$\text{sur }]0, (5C)^{\frac{2}{3}}[: y = \text{Ln} \left(\frac{1}{5} x^2 - \frac{C}{\sqrt{x}} \right), C > 0$$

$$\text{sur }]-\infty, 0[: y = \text{Ln} \left(\frac{1}{5} x^2 + \frac{C}{\sqrt{-x}} \right), C > 0$$

$$\text{sur }]-(5C)^{\frac{2}{3}}, 0[: y = \text{Ln} \left(\frac{1}{5} x^2 - \frac{C}{\sqrt{-x}} \right), C > 0$$