<u>Enoncé</u> :

Résoudre sur des intervalles maximaux l'équation différentielle :

$$\boldsymbol{t^2\, f''(t) + 3\, t\, f'(t) + 4\, f(t) = t\, Ln(t)}$$

<u>Solution</u> :

L'équation est définie pour $t \in]0, +\infty[$. On peut se ramener à un second membre plus facile à traiter en faisant le changement de variable $Ln(t) = x$ et en notant :

$$\forall\,(t, x) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R} :\ Ln(t) = x \Leftrightarrow\ t = e^x$$

On définit alors, pour toute fonction f deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ une fonction g deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$

$$g(x) = f(e^x)$$

et inversement, pour toute fonction g deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, une fonction f deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(t) = g\big(Ln(t)\big)$$

On a alors :

$$g'(x) = e^x\, f'(e^x)$$

$$g''(x) = e^x\, f'(e^x) + (e^x)^2\, f''(e^x)$$

Ainsi :

$$\forall\, t \in]0, +\infty[:\ t^2\, f''(t) + 3\, t\, f'(t) + 4\, f(t) = t\, Ln(t)$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in \mathbb{R} :\ (e^x)^2\, f''(e^x) + 3\, e^x\, f'(e^x) + 4\, f(e^x) = x\, e^x$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in \mathbb{R} :\ \ g''(x) - g'(x) + 3\, g'(x) + 4\, g(x) = x\, e^x$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, x \in \mathbb{R} :\ \ g''(x) + 2\, g'(x) + 4\, g(x) = x\, e^x$$

Cette dernière équation est du type linéaire à coefficients constants et se résout de façon classique. L'équation caractéristique est :

$$r^2 + 2\, r + 4 = 0$$

De racines :

$$r_1 = -1 - i\,\sqrt{3}, \qquad r_2 = -1 + i\,\sqrt{3}$$

L'équation homogène associée a donc pour solutions :

$$g(x) = e^{-x}\ \Big(A\, cos\big(\sqrt{3}\, x\big) + B\, sin\big(\sqrt{3}\, x\big)\Big)$$

Une solution particulière se cherche sous forme :

$$g_P(x) = (a\, x + b)\, e^x$$

Soit :

$$g'_P(x) = (a\,x + a + b)\,e^{x}$$

$$g''_P(x) = (a\,x + 2\,a + b)\,e^{x}$$

Ainsi, en reportant dans l'équation avec second membre et en simplifiant par le facteur exponentiel :

$$a\,x + 2\,a + b + 2\,(a\,x + a + b) + 4\,(a\,x + b) = x$$

Ce qui par identification des coefficients des deux polynômes du premier degré conduit à :

$$\begin{cases} a + 2\,a + 4\,a = 1 \\ 2\,a + b + 2\,(a + b) + 4\,b = 0 \end{cases}$$

qui donne :

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{7} \\ b = -\dfrac{4}{49} \end{cases}$$

D'où la solution générale de l'équation complète :

$$g(x) = e^{-x}\,\left(A\,cos\left(\sqrt{3}\,x\right) + B\,sin\left(\sqrt{3}\,x\right)\right) + \left(\frac{1}{7}\,x - \frac{4}{49}\right)\,e^{x}$$

Et celle de l'équation initiale, sur $]0, +\infty[$:

$$\boxed{f(t) = g\left(Ln(t)\right) = \frac{1}{t}\left(A\,cos\left(\sqrt{3}\,Ln(t)\right) + B\,sin\left(\sqrt{3}\,Ln(t)\right)\right) + t\left(\frac{1}{7}\,Ln(t) - \frac{4}{49}\right)}$$