<u>Enoncé</u> :

Soit q une fonction définie, continue et strictement positive sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{S}$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle linéaire (E) :

$$y'' = q(x)\, y$$

On note y_1 l'unique solution vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que y_1 est strictement positive, strictement croissante et strictement convexe. Déterminer la limite de y_1 en $+\infty$ et en tracer l'allure.

2) En utilisant le wronskien, montrer qu' une solution y_2 de (E) telle que (y_1, y_2) soit une base de $\mathbb{S}$ peut être définie par :

$$y_2(x) = y_1(x) \int_x^{+\infty} \frac{1}{{y_1}^2(x)}\, dx$$

(on justifiera soigneusement la convergence de l'intégrale impropre)

3) Donner le sens de variation de y_2 et montrer qu'elle admet une limite finie en $+\infty$

4) Déterminer la limite de y'_2 en $+\infty$. Montrer que $y_2(0) \in]0,1[$ et tracer l'allure de y_2.

<u>Réponses</u> :

1) Montrons que la dérivée de y_1 est strictement positive sur $[0\,;+\infty[$.

Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. Alors, soit y'_1 s'annule en un point $a \in]0\,;+\infty[$, soit y'_1 prend une valeur strictement négative en un point $b \in]0\,;+\infty[$ auquel cas, par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction continue y'_1 s'annule encore en un point $a \in]0\,;+\infty[$. On peut donc introduire le réel $a \in]0\,;+\infty[$ tel que :

$$a = inf_{]0\,;+\infty[}\{x \in]0\,;+\infty[\ : y'_1(x) = 0\}$$

Par continuité de y'_1 on a :

$$y'_1(a) = 0$$

Et sur$]0, a[$:

$$y'_1(x) > 0$$

Donc y_1 est strictement croissante sur $[0, a]$ et comme $y_1(0) > 0$, y_1 est strictement positive sur $[0, a]$ et $y"_1$ est strictement positive sur $[0, a]$ donc y'_1 est strictement croissante sur $[0, a]$. Ainsi :

$$y'_1(a) > y'_1(0) = 1$$

Ce qui est absurde.

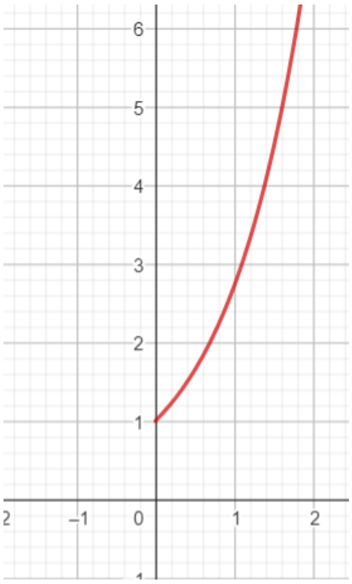
La dérivée de y_1 est donc strictement positive sur $[0\,;+\infty[$ et y_1 est strictement croissante , donc strictement positive ($y_1 \geq y_1(0) = 1$) et strictement convexe (${y''}_1 > 0$) sur le même intervalle.

y_1 étant convexe, sa courbe est au-dessus de sa tangente à l'origine, donc sur $]0\,;+\infty[$:

$$y_1(x) > y'_1(0)\ \ x + y_1(0) = x + 1$$

Par comparaison :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} y_1(x) = +\infty}$$



2) Soit y une solution de (E) telle que (y_1, y) soit une famille libre. Alors le wronskien $W(x)$ de ce couple ne s'annule pas et satisfait l'équation :

$$W'(x) = 0$$

Il est donc égal à une constante non nulle c. Ainsi :

$$y_1(x)\, y'(x) - y'_1(x)\, y(x) = c$$

Réciproquement, si $y(x)$ vérifie l'équation précédente, alors en dérivant :

$$y_1(x)\, y''(x) - y''_1(x)\, y(x) = 0$$

Donc :

$$y''(x) = \frac{y''_1(x)}{y_1(x)}\, y(x) = q(x)\, y(x)$$

Et ainsi, y est une solution de (E) telle que le wronskien de (y_1, y) soit une constante non nulle donc (y_1, y) une base de solutions.

Il suffit donc de déterminer une solution y_2 à l'équation différentielle suivante, pour une constante prise à une valeur quelconque non nulle :

$$y'(x) - \frac{y'_1(x)}{y_1(x)}\, y(x) = \frac{c}{y_1(x)}$$

Pour cela, utilisons la méthode de variation de la constante en notant que y_1 est solution de l'équation homogène associée et en cherchant y_2 sous la forme :

$$y_2(x) = k(x)\, y_1(x)$$

Ainsi :

$$y'_2(x) = k'(x)\, y_1(x) + k(x)\, y'_1(x)$$

Soit, en reportant dans l'équation :

$$k'(x)\, y_1(x) + k(x)\, y'_1(x) - \frac{y'_1(x)}{y_1(x)}\, k(x)\, y_1(x) = \frac{c}{y_1(x)}$$

$$k'(x)\, y_1(x) = \frac{c}{y_1(x)}$$

$$\boxed{k'(x) = \frac{c}{{y_1}^2(x)}}$$

Or sur $[0\,;+\infty[$ on a :

$$y_1(x) \geq x + 1 > 0$$

Donc :

$$0 < \frac{1}{{y_1}^2(x)} \leq \frac{1}{(x+1)^2}$$

Les deux inégalités étant strictes sur $]0\,;+\infty[$.

Par comparaison l'intégrale de $\frac{1}{{y_1}^2}$ est donc convergente sur $[0\,;+\infty[$ et :

$$0 < \int_0^{+\infty} \frac{1}{{y_1}^2(x)}\, dx < \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2}\, dx = 1$$

Une primitive de la fonction $\frac{1}{{y_1}^2}$ sur $[0\,;+\infty[$ est donc la fonction :

$$-\int_x^{+\infty} \frac{1}{{y_1}^2(x)}\, dx$$

Ainsi :

$$k(x) = -c \int_x^{+\infty} \frac{1}{{y_1}^2(t)}\, dt$$

Et on peut prendre pour c la valeur -1. Ainsi , on obtient :

$$\boxed{y_2(x) = y_1(x) \int_x^{+\infty} \frac{1}{{y_1}^2(t)}\, dt}$$

3) y_2 est strictement positive sur $[0\,;+\infty[$ donc y''_2 également. y'_2 est donc strictement croissante tout comme y'_1 sur $[0\,;+\infty[$ et donc y_2 est strictement convexe sur $[0\,;+\infty[$. De plus, sur $[0\,;+\infty[$: :

$$y'_2(x) = y'_1(x)\int_x^{+\infty} \frac{1}{{y_1}^2(t)}\,dt - y_1(x)\frac{1}{{y_1}^2(x)} = \int_x^{+\infty} \frac{y'_1(x)}{{y_1}^2(t)}\,dt - \frac{1}{y_1(x)}$$

Or pour $x \in [0\,;+\infty[\,, t \in]x\,;+\infty[$:

$$y'_1(x) < y'_1(t)$$

Donc :

$$\frac{y'_1(x)}{{y_1}^2(t)} < \frac{y'_1(t)}{{y_1}^2(t)}$$

Et par comparaison :

$$\int_x^{+\infty} \frac{y'_1(x)}{{y_1}^2(t)}\,dt < \int_x^{+\infty} \frac{y'_1(x)}{{y_1}^2(t)}\,dt$$

$$y'_1(x)\int_x^{+\infty} \frac{1}{{y_1}^2(t)}\,dt < \frac{1}{y_1(x)}$$

$$y'_1(x)\int_x^{+\infty} \frac{1}{{y_1}^2(t)}\,dt - \frac{1}{y_1(x)} < 0$$

Donc :

$$y'_2(x) < 0$$

y_2 est donc strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$ et comme elle est minorée par 0, elle admet une limite finie en $+\infty$.

4) y'_2 étant strictement croissante et strictement négative sur $[0\,;+\infty[$, elle admet une limite finie $L \leq 0$ en $+\infty$. Supposons par l'absurde $L < 0$.

$$y_2(x) - y_2(0) = \int_0^x y'_2(t)\,dt < \int_0^x L\,dt = L\,x$$

Par comparaison, on en déduit :

$$\lim_{x\to+\infty} y_2(x) = +\infty$$

Ce qui est absurde. Donc :

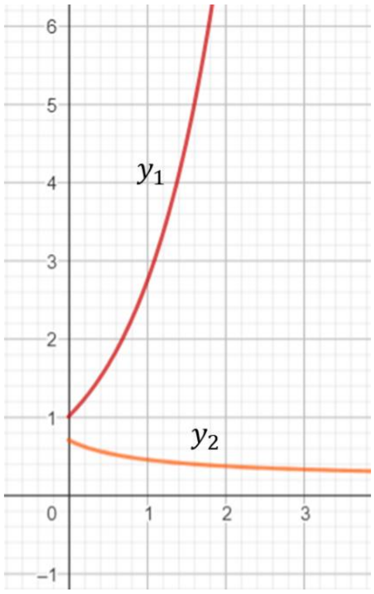
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} y'_2(x) = 0}$$

De plus :

$$y_2(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{{y_1}^2(t)}\,dt$$

Donc :

$$\boxed{0 < y_2(0) < 1}$$



6
5
4
3
2
1
0
−1
1
2
3
y_1
y_2