**Enoncé :**

**On considère l'application $f$ de $\mathbb{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même et définie par :**

$$f(X) = X - 2\, tr(X)\, A$$

1) **Montrer que $f$ est un endomorphisme**
2) **Montrer que si $tr(A) = 1/2$ alors $Vect(A) \subset Ker(f)$**
3) **Montrer que si $tr(A) \neq 1/2$ alors $Ker(f) = \{\vec{0}\}$**
4) **En déduire : $f$ injective $\Leftrightarrow$ $tr(A) \neq 1/2$**
5) **Déterminer $Ker(f)$ lorsque $tr(A) = 1/2$ puis montrer que $f$ est la projection sur l'ensemble $\mathbb{T}$ des matrices de trace nulle parallèlement à $Vect(A)$**
6) **Montrer que si $tr(A) = 1$ alors $f$ est une symétrie dont on donnera les éléments caractéristiques**
7) **Montrer que $f$ diagonalisable $\Leftrightarrow$ $tr(A) \neq 0$**

Correction

1) Soit $(X, Y, k) \in \mathbb{E}^2 \times \mathbb{R}$ alors :

$$f(X + k\,Y) = X + k\,Y - 2\,tr(X + k\,Y)\,A$$

$$= X + k\,Y - 2\left(tr(X) + k\,tr(Y)\right) A$$

$$= X - 2\,tr(X)A + k\,(Y - 2\,tr(Y)A) = f(X) + k\,f(Y)$$

2) Soit $X \in Vect(A)$ alors :

$$\exists\, k \in \mathbb{R} : X = k\,A$$
$$f(X) = f(k\,A) = k\,f(A) = k\,(A - 2\,tr(A)A) = 0$$

Donc :

$$X \in Ker(f)$$

3) Soit $X \in Ker(f)$ alors :

$$X = 2\,tr(X)A$$

Donc :

$$tr(X) = 2\,tr(X)tr(A)$$

Soit :

$$tr(X)\left(1 - 2\,tr(A)\right) = 0$$

D'où :

$$\boldsymbol{t}r(X) = 0$$

Puis :

$$X = 0$$

Donc :

$$Ker(f) = \{\vec{0}\}$$

4) On a :

$$f \ injective \ \Leftrightarrow \ Ker(f) = \{\vec{0}\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Ker(f) = \{\vec{0}\} \\ tr(A) \neq 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow \ tr(A) \neq 1/2$$

5) On note comme vu en 3) que $Ker(f) \subset Vect(A)$ donc d'après 1) $Ker(f) = Vect(A)$

Posons :

$$\mathbb{T} = \{X \in \mathbb{E} : tr(X) = 0\}$$

Alors :

$$X \in \mathbb{T} \cap Vect(A) \Rightarrow \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{R} : X = k\, A \\ Tr(X) = 0 \end{cases} \Rightarrow \ k\, Tr(A) = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow X = 0$$

Donc :

$$\mathbb{T} \cap Vect(A) = \{\vec{0}\}$$

Posons $X = (a_{ij})$ alors :

$$X \in \mathbb{T} \Leftrightarrow \ a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = 0$$

Donc :

$$\mathbb{T} = Vect\left[ (E_{ij})_{i \neq j}, (E_{ii} - E_{11})_{i \neq 1} \right]$$

Soit :

$$Dim(\mathbb{T}) = n^2 - 1$$

Donc :

$$Dim(\mathbb{T}) + Dim(Vect(A)) = n^2 - 1 + 1 = n^2 = Dim(\mathbb{E})$$

$\mathbb{T}$ et $Vect(A)$ sont donc supplémentaires dans $\mathbb{E}$

Or :

$$X = (X - 2\, tr(X)\, A) + 2\, tr(X) A$$
$$f(X) = (X - 2\, tr(X)\, A)$$

Avec :

$$X - 2\, tr(X)\, A \ \in \mathbb{T}, \qquad 2\, tr(X) A \in Vect(A)$$

Donc $f$ est la projection sur $\mathbb{T}$ parallèlement à $Vect(A)$

6) On a :

$$f\big(f(X)\big) = f(X) - 2\,tr\big(f(X)\big)A$$

$$= X - 2\,tr(X)\,A - 2\,tr(X - 2\,tr(X)\,A)\,A$$

$$= X - 2\,tr(X)\,A - 2\,tr(X)\,\big(1 - 2\,tr(A)\big)\,A$$

$$= X$$

Donc $f$ est involutive et donc symétrie par rapport à $Ker(f - Id)$ parallèlement à $Ker(f + Id)$

Or :

$$X \in Ker(f - Id) \Leftrightarrow\ f(X) = X \Leftrightarrow -2\,tr(X)A = 0 \Leftrightarrow\ tr(X) = 0$$

Donc : $Ker(f - Id) = \mathbb{T}$

Et :

$$X \in Ker(f + Id) \Leftrightarrow\ f(X) = -X \Leftrightarrow -2\,tr(X)A = -2\,X \Leftrightarrow\ tr(X)A = X$$

Donc : $Ker(f + Id) \subset Vect(A)$ d'où $0 < Dim\big(Ker(f + Id)\big) \leq Dim\big(Vect(A)\big) = 1$

Donc :

$$Ker(f + Id) = Vect(A)$$

$f$ est la symétrie par rapport à $\mathbb{T}$ parallèlement à $Vect(A)$

7) Déterminons les valeurs propres de $f$

$$\lambda\ valeur\ propre\ de\ f \Leftrightarrow\ \exists\, X \neq 0 : f(X) = \ \lambda\, X$$

Or pour $X \neq 0$ on a :

$$f(X) = \ \lambda\, X \Leftrightarrow\ \ (1 - \lambda)\, X = 2\,tr(X)A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ tr(X) = 0 \end{cases} ou\ \begin{cases} \lambda \neq 1 \\ (1 - \lambda)\, X = 2\,tr(X)A \\ (1 - \lambda)\, tr(X) = 2\,tr(X)tr(A) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ tr(X) = 0 \end{cases} ou\ \begin{cases} \lambda \neq 1 \\ \lambda = 1 - 2\,tr(A) \\ (1 - \lambda)\, X = 2\,tr(X)\,A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ tr(X) = 0 \end{cases} ou \begin{cases} \lambda \neq 1 \\ tr(A) \neq 0 \\ \lambda = 1 - 2\, tr(A) \\ X = \dfrac{tr(X)}{tr(A)}\, A \end{cases}$$

Distinguons deux cas :

1er cas : $tr(A) = 0$

$f$ n'admet que 1 pour valeur propre et le sous espace propre associé est $\mathbb{T}$ de dimension strictement inférieure à celle de $\mathbb{E}$ donc $f$ n'est pas diagonalisable

2ème cas : : $tr(A) \neq 0$

On a :

$$\mathbb{E}_{1-2\, tr(A)} \subset Vect(A)$$

Et pour $X \in Vect(A)$ : $f(X) = f(k\, A) = k\, A - 2\, k\, tr(A)A = \big(1 - 2\, tr(A)\big)\, X$

Donc :

$$\mathbb{E}_{1-2\, tr(A)} = Vect(A)$$

Ainsi $f$ a deux valeurs propres distinctes 1 et $1 - 2\, tr(A)$ et :

$$Dim(\mathbb{E}_1) + Dim\big(\mathbb{E}_{1-2\, tr(A)}\big) = Dim(\mathbb{E})$$

Donc $f$ est diagonalisable