<u>Enoncé</u> 1:

Soit A une matrice carrée d'ordre n à termes dans un corps $\mathbb{K}$ quelconque et diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. Soit $\mathbb{F}$ un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n_{col}$ des colonnes à n termes dans le corps $\mathbb{K}$.

Montrer que $\mathbb{F}$ est stable par A si et seulement si :

$$\mathbb{F} = \mathbb{F} \cap \boldsymbol{ker}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda_1}\, \boldsymbol{I_n}) \oplus \mathbb{F} \cap \boldsymbol{ker}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda_2}\, \boldsymbol{I_n}) \oplus \dots \oplus \mathbb{F} \cap \boldsymbol{ker}\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda_p}\, \boldsymbol{I_n}\right)$$

autrement dit si et seulement si $\mathbb{F}$ est somme de sous espaces des sous espaces propres de A.

<u>Enoncé</u> 2:

Soit A une matrice carrée d'ordre n à termes dans un corps $\mathbb{K}$ quelconque et diagonalisable et B une matrice carrée de même ordre.

1) Montrer que B commute avec A si et seulement si les sous espaces propres de A sont stables par B.

2) En déduire la dimension du commutant $C(A)$ de A c'est-à-dire de l'espace vectoriel formé par les matrices qui commutent avec A

<u>Enoncé 3 :</u>

Soit A une matrice carrée d'ordre n à termes dans un corps $\mathbb{K}$ quelconque et diagonalisable et $\mathbb{F}$ un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n_{col}$ stable par A.

1) Montrer que $\mathbb{F}$ admet un supplémentaire stable par A

2) On considère

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

Montrer que A possède un sous espace stable qui n'a pas de supplémentaire stable.

<u>Preuves</u> :

<u>Enoncé 1 :</u>

A étant diagonalisable, on a :

$$\mathbb{K}^n_{col} = ker(A - \lambda_1\, I_n) \oplus ker(A - \lambda_2\, I_n) \oplus \dots \oplus ker\left(A - \lambda_p\, I_n\right)$$

Soit $X \in \mathbb{K}^n_{col}$ alors :

il existe un unique $\left(X_1, X_2, \dots, X_p\right) \in ker(A - \lambda_1\, I_n) \times ker(A - \lambda_2\, I_n) \times \dots \times ker\left(A - \lambda_p\, I_n\right)$ tel que :

$$X = X_1 + X_2, \dots + X_p$$

Alors pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:

$$\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}(A-\lambda_k\, I_n)\ X=\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}(A-\lambda_k\, I_n)\ X_i=\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}(\lambda_i-\ \lambda_k)\ X_i$$

Ainsi si $\mathbb{F}$ est stable par A et alors :

$$\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}(A-\lambda_k\, I_n)\ X\in\mathbb{F}$$

Donc :

$$\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}(\lambda_i-\ \lambda_k)\ X_i\in\mathbb{F}$$

Or :

$$\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}(\lambda_i-\ \lambda_k)\neq 0$$

Donc :

$$X_i\in\mathbb{F}\cap ker(A-\lambda_i\, I_n)$$

Ainsi :

$$\mathbb{F}=\mathbb{F}\cap ker(A-\lambda_1\, I_n)\oplus\mathbb{F}\cap ker(A-\lambda_2\, I_n)\oplus\ldots\oplus\mathbb{F}\cap ker\left(A-\lambda_p\, I_n\right)$$

Réciproquement :

Si :

$$\mathbb{F}=\mathbb{F}\cap ker(A-\lambda_1\, I_n)\oplus\mathbb{F}\cap ker(A-\lambda_2\, I_n)\oplus\ldots\oplus\mathbb{F}\cap ker\left(A-\lambda_p\, I_n\right)$$

Alors si $X\in\mathbb{F}$ il se décompose en :

$$X=X_1+X_2,\ldots+X_p$$

où pour tout $i\in[\![1,p]\!]:\ X_i\in\mathbb{F}\cap ker(A-\lambda_i\, I_n)$. Alors :

$$A\,X=\lambda_1\,X_1+\lambda_2\,X_2,\ldots+\lambda_p\,X_p\in\mathbb{F}$$

Donc $\mathbb{F}$ est stable par A.

<u>Enoncé 2 :</u>

1) Supposons que B commute avec A.

Notons $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A. Alors :

$$\mathbb{K}_{col}^{n}=ker(A-\lambda_1\, I_n)\oplus ker(A-\lambda_2\, I_n)\oplus\ldots\oplus ker\left(A-\lambda_p\, I_n\right)$$

Soit $i \in [\![1,p]\!]$ et $X \in ker(A - \lambda_i I_n)$ alors :

$$A X = \lambda_i X$$

Donc :

$$A (B X) = B (A X) = B (\lambda_i X) = \lambda_i (B X)$$

D'où :

$$B X \in ker(A - \lambda_i I_n)$$

Les sous espaces propres de A sont donc stables par B.

Réciproquement, supposons les sous espaces propres de A stables par B.

Soit $X \in \mathbb{K}_{col}^n$, on peut le décomposer sur les sous espaces propres de A :

$$X = X_1 + X_2, \dots + X_p$$

Et :

$$B A X = B A X_1 + B A X_2, \dots + B A X_p = \lambda_1 B X_1 + \lambda_2 B X_2, \dots + \lambda_p B X_p$$

$$A B X = A B X_1 + A B X_2, \dots + A B X_p = \lambda_1 B X_1 + \lambda_2 B X_2, \dots + \lambda_p B X_p$$

Donc :

$$B A X = A B X$$

Et :

$$B A = A B$$

2) Notons P une matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont formées avec une base de vecteurs propres de A. Alors B commute avec A si et seulement si elle est de la forme :

$$B = P B' P^{-1}$$

où B' est une matrice formée de p blocs diagonaux D_i de taille n_i, la dimension de $ker(A - \lambda_i I_n)$.

La dimension du commutant de A est donc égale à la somme des nombres de termes des matrices D_i. Donc :

$$dim(C(A)) = \sum_{i=1}^{p} {n_i}^2$$

<u>Enoncé 3 :</u>

1) D'après le résultat de l'énoncé 1 :

$$\mathbb{F} = \mathbb{F} \cap ker(A - \lambda_1 I_n) \oplus \mathbb{F} \cap ker(A - \lambda_2 I_n) \oplus \dots \oplus \mathbb{F} \cap ker\left(A - \lambda_p I_n\right)$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de A.

Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ considérons un supplémentaire $\mathbb{E}'_{\lambda_i}$ de $\mathbb{F} \cap ker(A - \lambda_i I_n)$ dans $ker(A - \lambda_i I_n)$.

Alors la somme $\mathbb{E}'_{\lambda_1} + \mathbb{E}'_{\lambda_2} + \cdots + \mathbb{E}'_{\lambda_p}$ est directe et forme un supplémentaire de $\mathbb{F}$ dans $\mathbb{K}^n_{col}$ qui est stable par A.

2) Notons :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et considérons :

$$\mathbb{F} = Vect[E_1]$$

Alors

$$A\ \mathbb{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Donc $\mathbb{F}$ est stable par A.

Supposons par l'absurde qu'il existe un supplémentaire $\mathbb{G}$ de $\mathbb{F}$ stable par A. Alors $\mathbb{G}$ est de dimension 1 et si on considère un vecteur X non nul de $\mathbb{G}$ alors le couple (E_1, X) est libre. Posons :

$$X = a\ E_1 + b\ E_2$$

Alors :

$$A\ X = b\ E_1$$

Donc :

$$A\ X \in \mathbb{F}$$

Or $\mathbb{G}$ étant stable par A, $A\ X \in \mathbb{G}$. Donc :

$$A\ X = 0$$

Et donc :

$$b = 0$$

Puis :

$$X \in \mathbb{F}$$

Ceci est absurde car X est non nul.