<u>Enoncé</u> 1:

A étant une matrice à q lignes et p colonnes et B une matrice à p lignes et q colonnes, on définit les matrices carrées d'ordre par blocs $p+q$:

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \mathbf{0}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

1) Montrer que P et Q sont semblables.

2) Soit π_P le polynôme caractéristique de P. Exprimer π_P à l'aide des polynômes caractéristiques π_{AB} de $A\,B$ et π_{BA}de $B\,A$.

3) En déduire une relation entre π_{AB} et π_{BA}

<u>Enoncé</u> 3:

Soit a, b, c, d quatre réels strictement positifs et la matrice :

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{d}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{c} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{b} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres de M.

2) M est elle diagonalisable ?

<u>Enoncé</u> 3:

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et A une matrice complexe d'ordre n inversible. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On pose $B=A^p$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.

<u>Enoncé</u> 4:

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et A une matrice complexe d'ordre n. On pose, par blocs :

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{I_n} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

1) Montrer que si A est inversible et diagonalisable alors B est diagonalisable.

2) Montrer que si B est diagonalisable, il en est de même de A.

<u>Réponses</u> :

<u>Enoncé 1</u>

1)

$$\begin{pmatrix}0 & I_q\\ I_p & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & B\\ A & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & I_p\\ I_q & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$$

Remarque : cette technique est analogue à celle mettant en œuvre des matrices de permutation pour échanger des lignes ou des colonnes

P et Q sont donc semblables.

2) On a :

$$P - X\, I_{p+q} = \begin{pmatrix} -X\, I_p & B \\ A & -X\, I_q \end{pmatrix}$$

Et :

$$\begin{pmatrix} -X\, I_p & B \\ A & -X\, I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X\, I_p & 0 \\ A & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\, A - X^2\, I_p & B \\ 0 & -X\, I_q \end{pmatrix}$$

En prenant le déterminant :

$$\pi_P(X)\, X^p = \pi_{BA}(X^2)\, (-1)^q\, X^q$$

Par un raisonnement analogue :

$$\pi_Q(X)\, X^q = \pi_{AB}(X^2)\, (-1)^p\, X^p$$

3) Sachant :

$$\pi_P(X) = \pi_Q(X)$$

On a :

$$\pi_{BA}(X^2)\, (-1)^q\, X^q\, X^q = \pi_{AB}(X^2)\, (-1)^p\, X^p\, X^p$$

Soit :

$$\boxed{\pi_{BA}(X)\, (-1)^q\, X^q = \pi_{AB}(X)\, (-1)^p\, X^p}$$

Enoncé 2 :

1) Posons :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & d \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$A\, B = \begin{pmatrix} b\, c & 0 \\ 0 & a\, d \end{pmatrix}$$

D'après ce qui précède :

$$\pi_M(X) = (-1)^2\, \pi_{AB}(X^2) = (X^2 - a\, d)\, (X^2 - b\, c)$$

$$= \left(X - \sqrt{a\, d}\right) \left(X + \sqrt{a\, d}\right) \left(X - \sqrt{b\, c}\right) \left(X + \sqrt{b\, c}\right)$$

2) M a quatre valeurs propres réelles distinctes donc est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Enoncé 3 :

Supposons A diagonalisable. Alors il existe Q inversible et D diagonale telles que :

$$A = Q\ D\ Q^{-1}$$

Auquel cas :

$$A^p = Q\ D^p\ Q^{-1}$$

Donc A^p est diagonalisable :

Réciproquement, supposons A^p diagonalisable. Son polynôme minimal est alors scindé à racines simples donc de la forme :

$$m_{A^p}(X) = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - X)$$

Or :

$$m_{A^p}(A^p) = 0$$

Donc le polynôme $m_{A^p}(X^p)$ est un annulateur de A qui a des racines complexes simples Le polynôme minimal de A qui divise ce polynôme est donc à racines simples et A est diagonalisable.

Enoncé 4 :

1) On a :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Si A est diagonalisable alors il existe Q inversible et D diagonale telles que :

$$A = Q\ D\ Q^{-1}$$

Et ainsi :

$$B^2 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$$

Donc B^2 est diagonalisable.

De plus, si A inversible, B^2 est inversible donc B est inversible car $det(B^2) = det(B)^2 \neq 0$

D'après le résultat de l'énoncé 2, B est diagonalisable.

2) Supposons B diagonalisable alors B^2 est diagonalisable. Or le polynôme minimal de B^2 est le même que celui de A qui est donc de ce fait scindé à racines simples. Donc A est diagonalisable.