Exercice 3 *(10 points)*

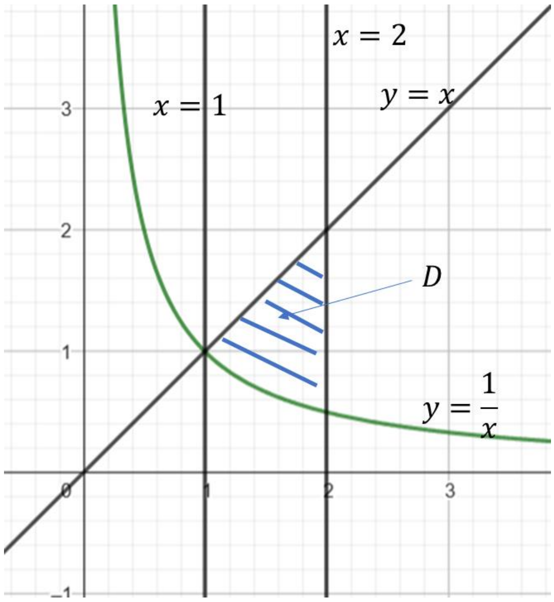
Soit (X,Y) un couple de variable aléatoire de densité f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = c\,\frac{x^2}{y^3}\mathbb{1}_D(x,y), \quad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ 1\le x\le 2, y\le x, xy\ge 1\}$$

1. Déterminer le réel c.
2. Déterminer la loi marginale de X et calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. Déterminer la loi marginale de Y.
4. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Réponse :

Représentons d'abord le domaine :



1) Calculons :

$$1 = \iint_D f(x,y)dx\,dy = c\int_{x=1}^{2} x^2 \left(\int_{y=\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{y^3}\,dy\right) dx$$

$$= c\int_{x=1}^{2} x^2 \left[-\frac{1}{2\,y^2}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} dx = \frac{c}{2}\int_{x=1}^{2} x^2\left(-\frac{1}{x^2}+x^2\right) dx$$

$$= \frac{c}{2}\int_{x=1}^{2} (-1+x^4)\,dx = \frac{c}{2}\left[-x+\frac{x^5}{5}\right]_1^2$$

$$= \frac{c}{2}\left(\left[-2+\frac{32}{5}\right]-\left[-1+\frac{1}{5}\right]\right) = \frac{c}{2}\left(-1+\frac{31}{5}\right) = \frac{c}{2}\times\frac{26}{5} = \frac{13\,c}{5}$$

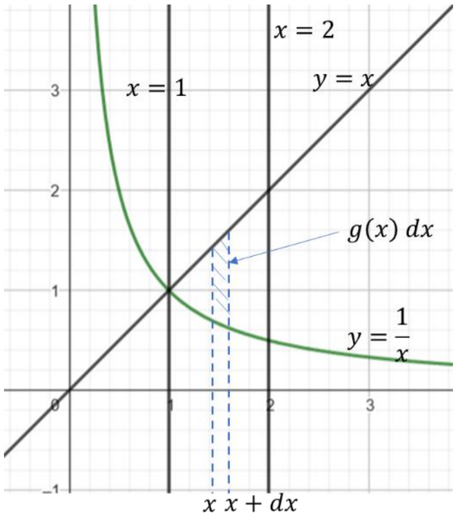
On en déduit :

$$\boxed{c = \frac{5}{13}}$$

2) Notons g la densité de X et h la densité de Y.

Pour $x \in]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$: $g(x) = 0$

Pour $x \in [1; 2]$ on a en s'aidant du graphique :



$$g(x) = \int_{y=\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy = \frac{5\,x^2}{13}\int_{y=\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{y^3}\,dy = \frac{5\,x^2}{13}\left[-\frac{1}{2\,y^2}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} = \frac{5\,x^2}{26}\left(-\frac{1}{x^2} + x^2\right)$$

$$\boxed{g(x) = \frac{5}{26}(x^4 - 1)}$$

On vérifie que c'est bien une densité :

$$\int_1^2 g(x)\,dx = \frac{5}{26}\left[\frac{x^5}{5} - x\right]_1^2 = \frac{5}{26}\left(\left(\frac{32}{5} - 2\right) - \left(\frac{1}{5} - 1\right)\right) = \frac{5}{26}\left(\frac{31}{5} - 1\right) = \frac{5}{26} \times \frac{26}{5} = 1$$

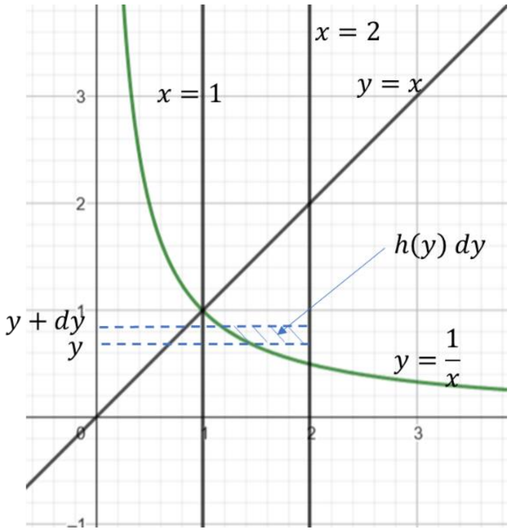
Calcul de l'espérance :

$$E(X) = \int_1^2 x\,g(x)\,dx = \frac{5}{26}\int_1^2 (x^5 - x)\,dx = \frac{5}{26}\left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{26 \times 6}[x^6 - 3\,x^2]_1^2$$
$$= \frac{5}{26 \times 6}\left((64 - 12) - (1 - 3)\right) = \frac{5 \times 54}{26 \times 6} = \frac{5 \times 9 \times 6}{26 \times 6}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{45}{26}}$$

3)

Si $y \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup \left]2; +\infty\right[$: $h(y) = 0$



Pour $y \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ $(voir\ graphique\ ci\ dessus)$:

$$h(y) = \int_{x=\frac{1}{y}}^{2} \frac{5\,x^2}{13\,y^3}\,dy = \frac{5}{13\,y^3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{y}}^{2} = \frac{5}{39\,y^3}\left(8 - \frac{1}{y^3}\right) = \frac{5}{39}\left(\frac{8}{y^3} - \frac{1}{y^6}\right)$$

Pour $y \in [1; 2]$:

$$h(y) = \int_{x=y}^{2} \frac{5\,x^2}{13\,y^3}\,dy = \frac{5}{13\,y^3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{y}^{2} = \frac{5}{39\,y^3}\,(8 - y^3) = \frac{5}{39}\left(\frac{8}{y^3} - 1\right)$$

On vérifie que c'est bien une densité :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} h(y)\,dy + \int_{1}^{2} h(y)\,dy$$

$$= \frac{5}{39}\left(\left[-\frac{4}{y^2} + \frac{1}{5\,y^5}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[-\frac{4}{y^2} - y\right]_{1}^{2}\right)$$

$$= \frac{5}{39}\left(-4 + \frac{1}{5} + 16 - \frac{32}{5} - 1 - 2 + 4 + 1\right) = \frac{5}{39}\left(-\frac{32}{5} + 14\right)$$

$$= \frac{5}{39} \times \frac{39}{5} = 1$$

4) On constate que l'on a pas pour tous les couples (x, y): $f(x, y) = g(x)\,h(y)$ donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes.