Etudier pour $\alpha \in]0, +\infty[$ la famille de courbes d'équations cartésiennes dans un repère orthonormé

$$\mathcal{C}_\alpha : \; x^\alpha + y^\alpha = 1, \qquad (x, y) \in [0, +\infty[^2$$

Solutions :

1) On a :

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; (x, y) \in \mathcal{C}_\alpha \Rightarrow \; (y, x) \in \mathcal{C}_\alpha$$

donc $\mathcal{C}_\alpha$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$

2) Soit $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ alors

$$\begin{cases} x^\alpha = e^{\alpha\, Ln(x)} > 0 \\ y^\alpha = e^{\alpha\, Ln(y)} > 0 \end{cases}$$

et :

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \lim_{y \to 0^+} y^\alpha = 0 = 1 - 1^\alpha$$

donc la courbe peut être prolongée par continuité avec les points $A(0,1)$ et $B(1,0)$. De plus :

$$\begin{cases} x^\alpha = 1 - y^\alpha \leq 1 \\ y^\alpha = 1 - x^\alpha \leq 1 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Les courbes $\mathcal{C}_\alpha$ se situent donc dans le carré $[0,1] \times [0,1]$

Etablissons une équation de la forme $y = f_\alpha(x)$

$$M(x, y) \in \mathcal{C}_\alpha \Leftrightarrow \; y^\alpha = 1 - x^\alpha$$

$$\Leftrightarrow \; y = (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

La fonction associée est donc la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f_\alpha(x) = (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\frac{1}{\alpha} Ln(1-x^\alpha)} \text{ sur }]0,1[$$
$$f(0) = 1$$
$$f(1) = 0$$

Etudions alors sur $]0,+\infty[$ pour x fixé dans $]0,1[$ la fonction :

$$g_x(t) = \frac{1}{t}\ Ln(1 - x^t)$$

$$g_x(t) = -\frac{1}{t^2}\ Ln(1 - x^t) - \frac{1}{t}\ Ln(x)\ \frac{x^t}{1 - x^t}$$

$$= \frac{-\,(1 - x^t)\ Ln(1 - x^t) - x^t\ Ln(x^t)}{t^2\ (1 - x^t)}$$

Or pour $u \in\ ]0,1[\ : -u\ Ln(u) > 0$ donc :

$$g_x{}'(t) > 0$$

g_x est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$ d'où :

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow\ g_x(\alpha_1) < g_x(\alpha_2) \Rightarrow\ f_{\alpha_1}(x) < f_{\alpha_2}(x)$$

Donc $\mathcal{C}_{\alpha_1}$ est strictement en dessous de $\mathcal{C}_{\alpha_2}$ sur $]0,1[$ et coupe $\mathcal{C}_{\alpha_2}$ en 0 et en 1

Notons que sur $[0,1]$ x^α est strictement croissante, donc $1 - x^\alpha$ strictement décroissante, $Ln(1 - x^\alpha)$ strictement décroissante et donc f_α strictement décroissante. De plus sur $]0,1[$:

$$f_\alpha{}'(x) = -\alpha\ x^{\alpha-1}\ (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

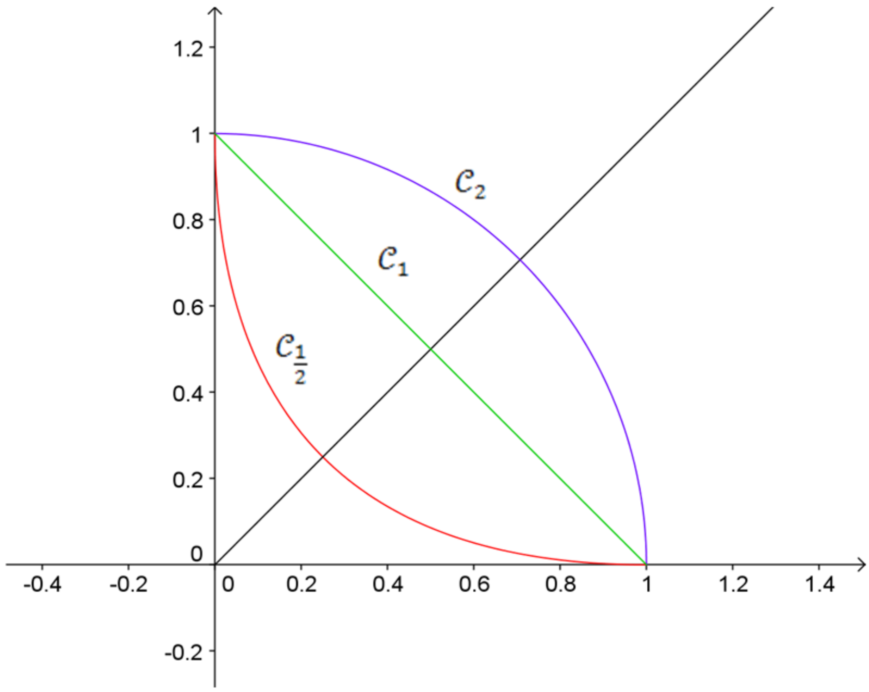
$$f_\alpha''(x) = -\alpha(\alpha - 1)\ x^{\alpha-2}\ (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \alpha^2\ x^{2\,\alpha-2}\ (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-2}$$

$$= \alpha\ (\alpha - 1)\ x^{\alpha-2}\ (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-2}\ (-(1 - x^\alpha) +\ 1)$$

$$= \alpha\ (\alpha - 1)\ x^{2\,\alpha-2}\ (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}-2}$$

f_α'' est donc du signe de $\alpha - 1$ donc f_α est strictement concave si $\alpha < 1$ et strictement convexe si $\alpha > 1$

L'allure des courbes $\mathcal{C}_\alpha$ compte tenu de la symétrie, est alors la suivante :



3) Tangentes en 0 et en 1

Rappelons qu'en 0 nous avons :

$$e^u - 1 \sim u\,, \qquad Ln(1-u) \sim -u$$

donc en 0 nous avons :

$$\frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x} = \frac{e^{\frac{1}{\alpha}Ln(1-x^\alpha)} - 1}{x} \sim \frac{1}{x}\frac{1}{\alpha}\, Ln(1-x^\alpha) \sim \frac{1}{\alpha\, x}\,(-x^\alpha) \sim -\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha}$$

D'où :

Si $0 < \alpha < 1$:

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{\alpha\, x^{1-\alpha}} = +\infty$$

f_α n'est alors pas dérivable en 0 mais $\mathcal{C}_\alpha$ admet une demi tangente verticale à droite en 0 et par symétrie, une demi-tangente horizontale à gauche en 1

Si $\alpha > 1$:

$$\lim_{x \to 0^+} -\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha} = 0$$

f_α est alors dérivable en 0 et $f_\alpha'(0) = 0$. $\mathcal{C}_\alpha$ admet alors une demi tangente horizontale à droite en 0 et par symétrie, une demi-tangente verticale à gauche en 1

Si $\alpha > 1$: $\mathcal{C}_\alpha$ a pour équation $y = x$ et admet donc cette même droite pour tangente (demi) en 0 et en 1

4) Etude de $\mathcal{C}_{1/2}$

L'étude a été faite de façon générale ci-avant. Cependant, nous avons pour $M(x, y) \in \mathcal{C}_{1/2}$:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

donc en élevant au carré :

$$x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y = 1$$

$$2\sqrt{x\,y} = 1 - x - y$$

en élevant à nouveau au carré :

$$4\,x\,y = 1 + x^2 + y^2 - 2\,x - 2\,y + 2\,x\,y$$

$$x^2 - 2\,x\,y + y^2 = 2\,x + 2\,y - 1$$

$$(x - y)^2 = 2\,x + 2\,y - 1$$

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x - \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}\,y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

Finalement :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x - \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,x + \frac{1}{\sqrt{2}}\,y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

Posons :

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, x - \dfrac{1}{\sqrt{2}} y \\ Y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\, y - \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Nous définissons ainsi un changement de repère tel que :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Soit en inversant la relation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Désignons par Ω le point de coordonnées $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ dans le repère orthonormé de référence $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du graphique et introduisons les vecteurs suivants :

$$\vec{I} : \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{J} : \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

La relation matricielle ci-dessus s'écrit pour $M(x, y)$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

$$\overrightarrow{\Omega M} = X\,\vec{I} + Y\,\vec{J}$$

(X, Y) est donc le couple de coordonnées de M dans le repère orthonormé $\left(\Omega, \vec{I}, \vec{J}\right)$ donc il vérifie pour un point M de $\mathcal{C}_{1/2}$:

$$\boxed{Y = \frac{\sqrt{2}}{2}\, X^2}$$

$\mathcal{C}_{1/2}$ est donc une portion de parabole de sommet Ω d'axe $\left(\Omega, \vec{J}\right)$ c'est-à-dire la bissectrice intérieure du repère de référence.