

Etudier la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x = \frac{t^3 - 3t}{t - 1} \\ y = \frac{3t^2 - 1}{t - 1} \end{cases}$$

Solution :

1) Domaine de définition

$$t \in]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

2) Symétries et périodicité

$x = f(t)$ et $y = g(t)$ ne sont ni paires ni impaires car le domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à 0 et :

$$f(1+h) = \frac{(1+h)^3 - 3(1+h)}{h} = \frac{1+3h+3h^2+h^3-3-3h}{h} = h^2 + 3h - \frac{2}{h}$$

$$f(1-h) = h^2 - 3h + \frac{2}{h}$$

Donc $f(1+h) + f(1-h)$ n'est pas constant et $f(1+h)$ n'est pas égal à $f(1-h)$ pour tout $h > 0$. La courbe $x = f(t)$ n'a donc ni symétrie axiale, ni symétrie centrale.

Les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ ne présente de plus par de période.

Nous sommes donc réduits à étudier la courbe sur son domaine de définition.

3) Limites aux bornes du domaine

En $+\infty$ et en $-\infty$:

$$\frac{t^3 - 3t}{t - 1} \sim t^2$$

$$\frac{3t^2 - 1}{t - 1} \sim 3t$$

Donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = -\infty$$

En 1 :

$$\frac{t^3 - 3t}{t-1} \sim \frac{-2}{t-1}$$

$$\frac{3t^2 - 1}{t-1} \sim \frac{2}{t-1}$$

Donc :

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} g(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} g(t) = +\infty$$

4) Variations de $f(t)$ et $g(t)$

$$f'(t) = \frac{(3t^2 - 3)(t-1) - (t^3 - 3t)}{(t-1)^2} = \frac{2t^3 - 3t^2 + 3}{(t-1)^2} = \frac{u(t)}{(t-1)^2}$$

$$g'(t) = \frac{6t(t-1) - (3t^2 - 1)}{(t-1)^2} = \frac{3t^2 - 6t + 1}{(t-1)^2} = \frac{v(t)}{(t-1)^2}$$

$$u'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t-1)$$

Variations de u :

t	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$u'(t)$	+	0	-	+
$u(t)$	$-\infty$	3	2	$+\infty$
	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$

Le tableau montre que u s'annule en une unique valeur t_0 de $] -\infty; 0[$ dont une valeur approchée est $t_0 \approx -0,8$

Racines de $3t^2 - 6t + 1$:

$$\Delta = 36 - 12 = 24$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{6}$$

$$t_1 = \frac{6 - 2\sqrt{6}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$t_2 = \frac{6 + 2\sqrt{6}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Points remarquables :

$$f(t_0) \approx -1$$

$$g(t_0) \approx -0,5$$

En $B(f(t_0), g(t_0))$ la tangente à la courbe est verticale

$$f(t_1) \approx 0,7$$

$$g(t_1) \approx 1,1$$

$$f(t_2) \approx 0,7$$

$$g(t_2) \approx 10,9$$

En $C(f(t_1), g(t_1))$ et en $D(f(t_2), g(t_2))$ la tangente à la courbe est horizontale

Le tableau de variation des fonctions x et y s'en déduit :

t	$-\infty$	t_0	t_1	1	t_2	$+\infty$
x'	-	0	+	+		+
y'	+	+	0	-		-
x	$+\infty$		$+\infty$			$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$		$\nearrow$	
		-1			$-\infty$	
y			$g(t_1)$		$+\infty$	$+\infty$
		$\nearrow$	$\searrow$		$\searrow$	$\nearrow$
	$-\infty$		$-\infty$		$g(t_2)$	

5) Concavité

Calcul du coefficient directeur de la tangente lorsque $f'(t) \neq 0$:

$$m(t) = \frac{y'}{x'} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{3t^2 - 6t + 1}{2t^3 - 3t^2 + 3}$$

$$m'(t) = \frac{(6t - 6)(2t^3 - 3t^2 + 3) - (3t^2 - 6t + 1)(6t^2 - 6t + 1)}{(2t^3 - 3t^2 + 3)^2}$$

$$= \frac{6(t - 1)(-t^3 + 3t^2 - t + 3)}{(2t^3 - 3t^2 + 3)^2}$$

On constate que 3 est racine de la cubique en dénominateur. Ainsi :

$$m'(t) = \frac{-6(t - 1)(t - 3)(t^2 + 1)}{(2t^3 - 3t^2 + 3)^2}$$

Donc $m'(t)$ est du signe du trinôme $-6(t - 1)(t - 3)$ donc :

pour $t \in]-\infty; t_1[$ on a : $m'(t) < 0$ et $x'(t) < 0$ donc $m(t)$ et $x(t)$ strictement décroissantes. Donc la courbe est strictement convexe.

pour $t \in]t_0; t_1[\cup]t_1; 1[$ on a : $m'(t) < 0$ et $x'(t) > 0$ donc $m(t)$ strictement décroissante et $x(t)$ strictement croissante. Donc la courbe est strictement concave.

pour $t \in]1; 3[$ on a : $m'(t) > 0$ et $x'(t) > 0$ donc la courbe est strictement convexe.

pour $t \in]3; +\infty[$ on a : $m'(t) < 0$ et $x'(t) > 0$ donc la courbe est strictement concave.

La courbe présente donc un point d'inflexion (changement de concavité) en $t = 3$ donc au point $A(9; 13)$. La tangente admet alors en ce point pour vecteur directeur :

$$\overrightarrow{w} \begin{pmatrix} f'(3) = \frac{15}{2} \\ g'(3) = \frac{5}{2} \end{pmatrix} // \overrightarrow{w}' \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6) Asymptotes aux branches infinies

La distance $OM(t)$ vaut :

$$OM(t) = \sqrt{(f(t))^2 + (g(t))^2}$$

Elle tend vers l'infini en $1, +\infty, -\infty$. Il y a donc 3 branches infinies, que nous allons étudier.

Branche infinie en 1 :

Faisons un développement asymptotique de x et y en posant $t = 1 + h$. Alors :

$$\begin{aligned} f(t) = f(1+h) &= \frac{(1+h)^3 - 3(1+h)}{h} = \frac{1+3h+3h^2+h^3-3-3h}{h} \\ &= \frac{-2}{h} + 3h + h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(t) = g(1+h) &= \frac{3(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{3+6h+3h^2-1}{h} \\ &= \frac{2}{h} + 6 + 3h \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f(t) + g(t) = 6 + h^2$$

Donc :

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) + g(t) - 6 = 0$$

La droite d'équation $x + y - 6 = 0$ est donc asymptote à la courbe

Branche infinie en $+\infty$ et en $-\infty$:

Nous allons procéder de la même façon en cherchant un développement asymptotique.

Pour cela on commence par déterminer un équivalent pour x et pour y .

$$f(t) \sim t^2$$

$$g(t) \sim 3t$$

On en déduit :

$$f(t) \sim \frac{1}{9}(g(t))^2$$

Déterminons alors un équivalent de la différence :

$$\begin{aligned} f(t) - \frac{1}{9}(g(t))^2 &= \frac{t^3 - 3t}{t-1} - \frac{1}{9} \left(\frac{3t^2 - 1}{t-1} \right)^2 \\ &= \frac{9(t^3 - 3t)(t-1)}{9(t-1)^2} - \frac{(3t^2 - 1)^2}{9(t-1)^2} \\ &= \frac{9t^4 - 9t^3 - 27t^2 + 27t}{9(t-1)^2} - \frac{9t^4 - 6t^2 + 1}{9(t-1)^2} \\ &= \frac{-9t^3 - 21t^2 + 27t - 1}{9(t-1)^2} \sim -t \end{aligned}$$

Donc :

$$f(t) - \frac{1}{9}(g(t))^2 \sim -\frac{1}{3}g(t)$$

Puis :

$$\begin{aligned} f(t) - \frac{1}{9}(g(t))^2 + \frac{1}{3}g(t) &= \frac{-9t^3 - 21t^2 + 27t - 1}{9(t-1)^2} + \frac{3t^2 - 1}{3(t-1)} \\ &= \frac{-9t^3 - 21t^2 + 27t - 1}{9(t-1)^2} + \frac{(3t^2 - 1)(3t - 3)}{9(t-1)^2} \\ &= \frac{-9t^3 - 21t^2 + 27t - 1}{9(t-1)^2} + \frac{9t^3 - 9t^2 - 3t + 3}{9(t-1)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{-30 t^2 + 24 t + 2}{9 (t - 1)^2} \sim -\frac{30}{9} = -\frac{10}{3}$$

Donc :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ (-\infty)}} f(t) - \frac{1}{9} (g(t))^2 + \frac{1}{3} g(t) + \frac{10}{3} = 0$$

Donc la courbe admet en $+\infty$ et en $-\infty$ une parabole asymptote d'équation :

$$x - \frac{1}{9} y^2 + \frac{1}{3} y + \frac{10}{3} = 0$$

7) Recherche des points doubles

Il faut résoudre le système en (t, t') suivant :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f(t) = f(t') \\ g(t) = g(t') \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t^3 - 3t}{t - 1} = \frac{t'^3 - 3t'}{t' - 1} \\ \frac{3t^2 - 1}{t - 1} = \frac{3t'^2 - 1}{t' - 1} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (t^3 - 3t)(t' - 1) = (t'^3 - 3t')(t - 1) \\ (3t^2 - 1)(t' - 1) = (3t'^2 - 1)(t - 1) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 t' - t'^3 t - (t^3 - t'^3) + 3(t - t') = 0 \\ 3(t^2 t' - t'^2 t) - 3(t^2 - t'^2) + (t - t') = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} t t' (t - t') (t + t') - (t - t') (t^2 + t t' + t'^2) + 3(t - t') = 0 \\ 3 t t' (t - t') - 3(t - t') (t + t') + (t - t') = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} t t' (t + t') - ((t + t')^2 - t t') + 3 = 0 \\ 3 t t' - 3(t + t') + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{cases} S = t + t' \\ P = t t' \end{cases}$$

Et résolvons :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} P S - (S^2 - P) + 3 = 0 \\ 3 P - 3 S + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{3 S - 1}{3} S - \left(S^2 - \frac{3 S - 1}{3} \right) + 3 = 0 \\ P = \frac{3 S - 1}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} S = -4 \\ P = -\frac{13}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit qu'il y a un unique point double A , (t, t') étant le couple de racines du polynôme :

$$P(X) = X^2 - S X + P = X^2 + 4 X - \frac{13}{3} = \frac{1}{3}(3 X^2 + 12 X - 13)$$

Le discriminant de $3 X^2 + 12 X - 13$ est :

$$\Delta = 144 - 4 \times 3 \times (-13) = 4 \times 75$$

$$\sqrt{\Delta} = 10 \sqrt{3}$$

Les racines sont :

$$x_1 = \frac{-12 - 10 \sqrt{3}}{6} = \frac{-6 - 5 \sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = \frac{-12 + 10 \sqrt{3}}{6} = \frac{-6 + 5 \sqrt{3}}{3}$$

Toutefois, en notant que la somme des racines est rationnelle, il est plus judicieux de calculer les coordonnées du point double en notant que :

$$\begin{cases} x_A = \frac{1}{2} (f(t) + f(t')) \\ y_A = \frac{1}{2} (g(t) + g(t')) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{1}{2} \frac{(t^3 - 3t)(t' - 1) + (t'^3 - 3t')(t - 1)}{(t - 1)(t' - 1)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{t t' (t^2 + t'^2) - (t^3 + t'^3) + 3(t + t') - 6 t t'}{t t' - (t + t') + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{P(S^2 - 2P) - (S^3 - 3SP) + 3S - 6P}{P - S + 1} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\frac{-13}{3} \left(16 + \frac{26}{3}\right) - 64 - 52 - 12 + 26}{\frac{-13}{3} + 5} \\
&= \frac{1}{2} \frac{-\frac{962}{9} + 30}{\frac{2}{3}} = \frac{208}{4 \times 3} = \frac{52}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_A &= \frac{1}{2} \frac{(3t^2 - 1)(t' - 1) + (3t'^2 - 1)(t - 1)}{(t - 1)(t' - 1)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{3tt'(t + t') - 3(t^2 + t'^2) - (t + t') + 2}{(t - 1)(t' - 1)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{3PS - 3(S^2 - 2P) - S + 2}{P - S + 1} \\
&= \frac{1}{2} \frac{52 - 3\left(16 + \frac{26}{3}\right) + 4 + 2}{\frac{2}{3}} = -12
\end{aligned}$$

Donc $A\left(\frac{52}{3}; -12\right)$

8) Allure de la courbe (en rouge) avec ses deux asymptotes

