<u>Exercice</u> :

On pose pour $(k,n) \in \mathbb{N}^2$:

Si $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)}$$

Si $k > n$:

$$\binom{n}{k} = 0$$

1) Montrer pour r, n, m entiers naturels tels que $0 \leq r \leq n \leq m$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{n+m}{r}$$

2) En déduire :

$$\sum_{(k,l)\in[\![0,n]\!]} (k+l) \binom{n}{l} \binom{n}{k}$$

3) Transformer pour $k \geq 1, n \geq 1$ l'expression suivante en faisant apparaitre une seule combinaison :

$$\binom{2\,n-1}{n+k-1} - \binom{2\,n-1}{n+k}$$

4) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{2\,n}{n+k} = n \binom{2\,n-1}{n-1}$$

Puis :

$$\sum_{0\leq k\leq l\leq n} (l-k) \binom{n}{l} \binom{n}{k} = n \binom{2\,n-1}{n-1}$$

5) Exprimer à l'aide d'opérations simples pour tout $(k,l) \in \mathbb{N}^2$:

$$max(k,l) + min(k,l)$$

$$max(k,l) - min(k,l)$$

6) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S = \sum_{(k,l)\in[\![0,n]\!]} max(k,l) \binom{n}{l} \binom{n}{k}$$

$$T = \sum_{(k,l)\in[\![0,n]\!]} min(k,l) \binom{n}{l} \binom{n}{k}$$

Solution :

1) Première méthode :

Considérons un ensemble formé de $n+m$ éléments, éventuellement vide si $m=n=0$: :

$$\mathbb{G}=\{e_1,e_2,\dots,e_n,f_1,f_2,\dots,f_m\}$$

Et notons :

$$\mathbb{E}=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$$

$$\mathbb{F}=\{f_1,f_2,\dots,f_m\}$$

Un sous ensemble à r éléments de $\mathbb{G}$ est alors formé par la réunion d' un sous-ensemble à k éléments de $\mathbb{E}$ et d'un sous ensemble à $r-k$ éléments de $\mathbb{F}$.

Or on peut former $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de $\mathbb{E}$ ayant k éléments, $\binom{n}{r-k}$ sous-ensembles de $\mathbb{F}$ ayant $r-k$ éléments et donc $\binom{n}{k}\binom{n}{r-k}$ sous-ensembles de $\mathbb{G}$ à k éléments de $\mathbb{E}$ et $r-k$ éléments de $\mathbb{F}$, k pouvant prendre toutes les valeurs de 0 à n. La formule s'en déduit.

Deuxième méthode :

Par récurrence sur m.

Initialisation : $m=0$ auquel cas $r=n=0$

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}\binom{m}{0-k}=1=\binom{m}{0}$$

La propriété est triviale

Hérédité : on suppose la propriété vraie pour $m\in\mathbb{N}$

Soit alors $0\le r\le n\le m+1$ alors :

Si $r=0$:

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{m+1}{r-k}=1=\binom{n+m+1}{0}$$

Sinon $r>0$ et :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{m+1}{r-k}&=\binom{n}{r}+\sum_{k=0}^{r-1}\binom{n}{k}\binom{m+1}{r-k}=\binom{n}{r}+\sum_{k=0}^{r-1}\binom{n}{k}\left(\binom{m}{r-k}+\binom{m}{r-k-1}\right)\\&=\binom{n}{r}+\sum_{k=0}^{r-1}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}+\sum_{k=0}^{r-1}\binom{n}{k}\binom{m}{r-1-k}\\&=\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}+\sum_{k=0}^{r-1}\binom{n}{k}\binom{m}{r-1-k}=\binom{n+m}{r}+\binom{n+m}{r-1}=\binom{n+m+1}{r}\end{aligned}$$

La propriété est donc encore vraie pour $m+1$

2) Posons :

$$U_{k,l} = (k + l) \binom{n}{l} \binom{n}{k}$$

$$S_n = \sum_{(k,l) \in [\![0,n]\!]} U_{k,l}$$

Et introduisons les $U_{k,l}$ dans un tableau matriciel à $n+1$ lignes et $n+1$ colonnes où k désigne l'indice de ligne et l l'indice de colonne.

$k\backslash l$	0	1			k		l		n
0									
1									
k							$U_{k,l}$		
n									

S_n est alors la somme des éléments de ce tableau. Elle peut être écrite autrement, comme étant

$$S_n = S'_n + S''_n$$

où S'_n désigne la somme des sommes des termes des $n+1$ premières diagonales ascendantes (illustrées en vert et jaune dans le tableau précédent) et S''_n la somme des sommes des termes des diagonales ascendantes suivantes (illustrées en bleu ciel dans le tableau).

Pour les $n+1$ premières diagonales ascendantes, repérons une diagonale (illustrée en jaune dans le tableau précédent) par l'indice k du numéro de ligne de son terme le plus bas et désignons par $S'_{n,k}$ la somme des termes de cette diagonale .

Notons alors que pour tous les termes $U_{q,l}$ de la diagonale d'indice k la somme des indices $q+l$ est constante et donc égale à celle du terme $U_{k,0}$ laquelle vaut k. Ces termes sont donc de la forme $U_{k-l,l}$. Ainsi :

$$S'_{n,k} = \sum_{l=0}^{k} U_{k-l,l}$$

et :

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} S'_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} U_{k-l,l} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} k \binom{n}{l} \binom{n}{k-l} = \sum_{k=0}^{n} k \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l} \binom{n}{k-l}$$

$$\boxed{S'_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{2\,n}{k}}$$

Pour les n diagonales ascendantes restantes, repérons une diagonale par l'indice k du numéro de ligne de son terme le plus haut et désignons par $S''_{n,k}$ la somme des termes de cette diagonale .

Là encore, pour tous les termes $U_{q,l}$ de la diagonale d'indice k la somme des indices $q + l$ est constante et donc égale à celle du terme $U_{k,n}$ laquelle vaut $n + k$. Ainsi :

$$S''_{n,k} = \sum_{l=k}^{n} U_{n+k-l,l}$$

et :

$$S''_n = \sum_{k=1}^{n} S''_{n,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=k}^{n} U_{n+k-l,l} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} U_{n-l,l+k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} (n+k) \binom{n}{l+k} \binom{n}{n-l}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (n+k) \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n}{n-k-l} \binom{n}{l} = \sum_{k=1}^{n} (n+k) \binom{2\,n}{n-k}$$

$$\boxed{S''_n = \sum_{k=n+1}^{2\,n} k \binom{2\,n}{k}}$$

Donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{2\,n}{k} + \sum_{k=n+1}^{2\,n} k \binom{2\,n}{k}$$

Soit :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{2\,n} k \binom{2\,n}{k}}$$

Or pour tout réel x :

$$(x+1)^{2\,n} = \sum_{k=0}^{2\,n} \binom{2\,n}{k} x^k$$

et en dérivant :

$$2\,n\,(x+1)^{2\,n-1} = \sum_{k=1}^{2\,n} k \binom{2\,n}{k} x^{k-1}$$

puis en faisant $x = 1$:

$$2\,n\,2^{2\,n-1} = \sum_{k=1}^{2\,n} k \binom{2\,n}{k}$$

Ainsi :

$$\boxed{S_n = n\, 2^{2\,n}}$$

3)

$$\binom{2\,n-1}{n+k-1} - \binom{2\,n-1}{n+k} = \frac{(2\,n-1)!}{(n+k-1)!\ (n-k)!} - \frac{(2\,n-1)!}{(n+k)!\ (n-k-1)!}$$

$$= \frac{(2\,n-1)!\ \big((n+k)-(n-k)\big)}{(n+k)!\ (n-k)!}$$

$$= \frac{(2\,n-1)!\ (2\,k)}{(n+k)!\ (n-k)!}$$

$$= \frac{k}{n}\frac{(2\,n)!}{(n+k)!\ (n-k)!}$$

$$= \frac{k}{n}\binom{2\,n}{n+k}$$

4)

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{2\,n}{n+k} = \sum_{k=0}^{n} n\left(\binom{2\,n-1}{n+k-1} - \binom{2\,n-1}{n+k}\right) = n\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{2\,n-1}{n+k-1} - \binom{2\,n-1}{n+k}\right)$$

$$= n\left(\binom{2\,n-1}{n-1} - \binom{2\,n-1}{n}\right) = n\binom{2\,n-1}{n-1}$$

$$\sum_{0\le k\le l\le n} (l-k)\binom{n}{l}\binom{n}{k} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{\substack{0\le k\le l\le n\\ l-k=j}} (l-k)\binom{n}{l}\binom{n}{k}$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\sum_{\substack{0\le k\le l\le n\\ k=l-j}} j\binom{n}{l}\binom{n}{l-j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{l=j}^{n} j\binom{n}{l}\binom{n}{l-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} j\binom{n}{l}\binom{n}{l-j} = \sum_{j=0}^{n} j\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\binom{n}{n+j-l}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} j\binom{2\,n}{n+j} = n\binom{2\,n-1}{n-1}$$

5)

$$max(k,l) + min(k,l) = l + k$$

$$max(k,l) - min(k,l) = |l-k|$$

6)

$$S + T = \sum_{0 \le k,l \le n} (l+k) \binom{n}{l} \binom{n}{k} = n\, 2^{2\,n}$$

$$S - T = \sum_{0 \le k,l \le n} (l-k) \binom{n}{l} \binom{n}{k} = 2 \sum_{0 \le k \le l \le n} (l-k) \binom{n}{l} \binom{n}{k} = 2\, n \binom{2\,n-1}{n-1}$$

$$2\, S = n\, 2^{2\,n} + 2\, n \binom{2\,n-1}{n-1}$$

$$2\, T = n\, 2^{2\,n} - 2\, n \binom{2\,n-1}{n-1}$$

$$\boldsymbol{S = n\, 2^{2\,n-1} + n \binom{2\,n-1}{n-1}}$$

$$\boldsymbol{T = n\, 2^{2\,n-1} - \ n \binom{2\,n-1}{n-1}}$$