<u>Enoncé</u> :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et bornée sur tout intervalle borné et telle qu'il existe un réel λ tel que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x+1)-f(x)=\lambda$$

Montrer que l'on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lambda$$

(Indication : Penser aux sommes télescopiques)

<u>Solution</u> :

<u>1er : Cas où $\lambda = 0$:</u>

Déterminons pour $x > 1$ le plus grand entier naturel $n(x)$ tel que $x - n(x) \geq 0$ donc $x - (n(x)+1) < 0$ soit :

$$n(x) \leq x < n(x)+1$$

Cet entier n'est autre que la partie entière de x.

On a alors, par somme télescopique :

$$f(x)-f\big(x-n(x)\big)$$
$$=\big(f(x)-f(x-1)\big)+\big(f(x-1)-f(x-2)\big)+\cdots+(f(x-n(x)+1)-f(x-n(x)))$$

Soit :

$$f(x)=\left(\sum_{k=0}^{n(x)-1}(f(x-n(x)+k+1)-f(x-n(x)+k))\right)+f\big(x-n(x)\big)$$

Donc :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{n(x)-1}|(f(x-n(x)+k+1)-f(x-n(x)+k)|\right)+\frac{\big|f\big(x-n(x)\big)\big|}{x}$$

Soit alors $\varepsilon > 0$:

Il existe $\alpha > 0$:

$$x > \alpha \Rightarrow |f(x+1)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour $x > \alpha + 2$ on a donc : $n(x) > \alpha$ et pour $k \geq \alpha$: $x - n(x) + k \geq x - n(x) + \alpha > \alpha$. Donc :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{n(\alpha)} |(f(x-n(x)+k+1)-f(x-n(x)+k)| \right.$$
$$\left. + \sum_{k=n(\alpha)}^{n(x)-1} |(f(x-n(x)+k+1)-f(x-n(x)+k)| \right) + \frac{\left|f\left(x-n(x)\right)\right|}{x}$$

Or sur $[0, \max(1, n(\alpha)+2]$ f est bornée. Notons M un majorant de sa valeur absolue. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n(\alpha)} |(f(x-n(x)+k+1)-f(x-n(x)+k)| \leq$$

$$\sum_{k=0}^{n(\alpha)} \left(\left|\left(f(x-n(x)+k+1)\right)\right| + \left|\left(f(x-n(x)+k)\right)\right|\right) \leq 2\,M\,(n(\alpha)+1)$$

Et :

$$\frac{\left|f\left(x-n(x)\right)\right|}{x} \leq \frac{M}{x}$$

Ainsi :

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{M\,(2\,n(\alpha)+3\,)}{x} + \frac{n(x)-n(\alpha)}{x}\,\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{M\,(2\,n(\alpha)+3\,)}{x} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{M\,(2\,n(\alpha)+3\,)}{x} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Donc il existe $\beta > \alpha$ tel que :

$$x > \beta \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon$$

D'où :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

<u>2ème : Cas où $\lambda \neq 0$:</u>

On introduit la fonction :

$$g(x) = f(x) - \lambda\,x$$

$$g(x+1) - g(x) = f(x+1) - f(x) - \lambda$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x+1) - g(x) = 0$$

Et g est bornée sur tout intervalle borné :

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$$

D’où :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$$