Réciproque d'une fonction homographique

Soit une fonction de la forme :

$$\mathrm{f(x)} = \frac{a\,x + b}{c\,x + d}$$

où a, b, c, d sont quatre nombres réels donnés avec c non nul.

a) Donner le domaine de définition et de dérivabilité
b) Calculer la dérivée et les limites aux bornes du domaine de définition
c) A quelle condition sur a, b, c, d f est elle constante ?
d) Mettre f sous forme canonique et retrouver le résultat précédent. On exprimera les différents paramètres de la forme canonique en fonction de a, b, c, d et on travaillera avec cette forme par la suite.
e) En déduire, dans le cas où f n'est pas une fonction constante (f est alors qualifiée de fonction homographique) , le tableau de variation, en distinguant deux cas, et montrer que cette fonction permet de définir dans les deux cas une unique application bijective de son domaine de définition dans un domaine à déterminer
f) Donner alors l'expression analytique de l'application réciproque et en déduire que la réciproque d'une fonction homographique est une fonction homographique.

<u>Solution</u>

$$\mathrm{f(x)} = \frac{a\,x + b}{c\,x + d}$$

a)

$$\mathrm{D_f} = \mathrm{D_{f'}} = \left]-\infty\,;\,-\frac{d}{c}\right[\,\cup\,\left]-\frac{d}{c}\,;\,+\infty\right[$$

b)

$$\mathrm{f'(x)} = \frac{a\,(c\,x + d) - \,c\,(a\,x + b)}{(c\,x + d)^2} = \frac{ad - bc}{(c\,x + d)^2}$$

c)

f constante $\Leftrightarrow\ ad - bc = 0$

d) Forme canonique

on pose $c\,x + d = t$ soit

$$x = \frac{t-d}{c}$$

$$\mathrm{f(x)} = \frac{a\,x+b}{c\,x+d} = \frac{a\left(\frac{t-d}{c}\right)+b}{t} = \frac{a\,(t-d)+b\,c}{c\,t} = \frac{a\,t-ad+b\,c}{c\,t} = \frac{a\,t}{c\,t} - \frac{a\,d-b\,c}{c\,t}$$

$$\mathrm{f(x)} = \frac{a}{c} - \frac{a\,d-b\,c}{c\,(c\,x+d)} = \frac{a}{c} - \frac{a\,d-b\,c}{c\,(c\,x+d)} = \frac{a}{c} - \frac{a\,d-b\,c}{c^2\left(x+\frac{d}{c}\right)}$$

Soit en posant :

$$k = -\frac{a\,d-b\,c}{c^2} \quad ; \quad \alpha = -\frac{d}{c} \quad ; \quad \beta = \frac{a}{c}$$

$$\mathrm{f(x)} = \frac{k}{x-\alpha} + \beta$$

$$\lim_{\mathrm{x}\to+\infty} \mathrm{f(x)} = \lim_{\mathrm{x}\to+\infty} \frac{a\,x}{c\,x} = \frac{a}{c} = \beta$$

$$\lim_{\mathrm{x}-\infty} \mathrm{f(x)} = \frac{a}{c} = \beta$$

$$\lim_{\mathrm{x}\to-\alpha^-} \mathrm{f(x)} = -\infty \text{ si } \mathrm{k} > 0 \ (+\infty \text{ si } \mathrm{k} < 0)$$

$$\lim_{\mathrm{x}\to-\alpha^+} \mathrm{f(x)} = +\infty \text{ si } \mathrm{k} > 0 \ (-\infty \text{ si } \mathrm{k} < 0)$$

Tableau de variations :

k > 0

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	II	$-$	
$f(x)$	β	↘	II $-\infty$ II	↘	β

k < 0

x	$-\infty$ $+\infty$		α	
$f'(x)$		$-$	II	$-$
$f(x)$	β β	$+\infty$ $\nearrow$	II II II $-\infty$	$\nearrow$

Dans les deux cas, f définit une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{\beta\}$

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}\setminus\{\alpha\} \to \mathbb{R}\setminus\{\beta\} \\ x \to y = f(x) = \dfrac{k}{x-\alpha} + \beta \\ x = f^{-1}(y) \leftarrow y \end{cases}$$

f)

Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{\beta\}$ et $x \in \mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$

$$y = \frac{k}{x-\alpha} + \beta \Leftrightarrow y - \beta = \frac{k}{x-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha = \frac{k}{y-\beta}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k}{y-\beta} + \alpha$$

Donc :

$$f^{-1}(y) = \frac{k}{y-\beta} + \alpha$$

Ceci prouve que la réciproque d'une fonction homographique est une fonction homographique