Enoncé

La croissance de la masse d'un organisme est décrite par le modèle de Benjamin Gompertz. Selon ce modèle, la masse m est solution de l'équation différentielle suivante sur $[0;+\infty[$ avec $r>0, K>0$:

$$y' = r\,y\,(Ln(K) - Ln(y)) \quad (E)$$

On note $m(0) = m_0$ masse de l'organisme à un temps initial pris comme référence.

1) **On suppose $m_0 > K$**

   Montrer alors que l'équation (E) admet une solution unique maximale sur $[0;+\infty[$

   En déduire que cette solution est inacceptable dans le modèle de Gompertz et donc que $0 < m_0 \leq K$

2) **Montrer que l'équation (E) admet une solution unique maximale sur $[0;+\infty[$ dans le cas $m_0 = K$ puis dans le cas $m_0 < K$ et interpréter ces solutions dans le modèle de Gompertz**

Les justifications d'unicité de la solution se feront sans utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Solution

1) Existence d'une solution maximale pour $m_0 > K$. Soit m une fonction dérivable sur $[0;+\infty[$ et telle que $\forall\, t \in [0;+\infty[\,:\, m(t) > K$. Alors :

$$\forall\, t \in [0;+\infty[\,:\; m'(t) = r\,m(t)\,\Big(Ln(K) - Ln\big(m(t)\big)\Big)$$

$$\Leftrightarrow\; \forall\, t \in [0;+\infty[\,:\; \frac{m'(t)}{m(t)\,\Big(Ln(K) - Ln\big(m(t)\big)\Big)} = r$$

$$\Leftrightarrow\; \forall\, t \in [0;+\infty[\,:\; \int_0^t \frac{m'(x)}{m(x)\,\Big(Ln(K) - Ln\big(m(x)\big)\Big)}\,dx = \int_0^t r\,dx$$

Posons :

$$v(x) = Ln\big(m(x)\big) - Ln(K)$$

Soit :

$$v'(x) = \frac{m'(x)}{m(x)}$$

L'équation précédente équivaut alors à :

$$\forall\, t \in [0; +\infty[\ :\ -\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \frac{v'(x)}{v(x)}\, dx = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} r\, dx$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, t \in [0; +\infty[\ : Ln(v(0)) - Ln(v(t)) = r\, t$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, t \in [0; +\infty[\ : \frac{v(0)}{v(t)} = e^{r\, t}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, t \in [0; +\infty[\ : v(t) = v(0)\, e^{-r\, t}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, t \in [0; +\infty[\ : Ln\big(m(t)\big) - Ln(K) = \big(Ln\big(m(0)\big) - Ln(K)\big)\, e^{-r\, t}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, t \in [0; +\infty[\ : \frac{m(t)}{K} = Ln\left(\frac{m(0)}{K}\right)\, e^{-r\, t}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\, t \in [0; +\infty[\ : m(t) = K\, e^{\,Ln\left(\frac{m(0)}{K}\right) e^{-r\, t}}$$

Posons :

$$c = Ln\left(\frac{m(0)}{K}\right) > 0$$

Et considérons la fonction :

$$m(t) = K\, e^{\,c\, e^{-r\, t}}$$

Sa dérivée est :

$$m(t) = -r\, c\, K\, e^{-r\, t} e^{\,c\, e^{-r\, t}} < 0$$

Donc m est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. De plus :

$$\lim_{t \to +\infty} K\, e^{\,c\, e^{-r\, t}} = K$$

Donc :

$$\forall\, t \in [0; +\infty[\ : m(t) > K$$

m est donc une solution maximale sur $[0; +\infty[$ ce qui prouve l'existence. Pour l'unicité, soit une solution y sur un intervalle de la forme $[0; a[$ avec $a > 0$. Alors, par continuité en 0, il existe un réel b tel que $0 < b < a$ et $y(t) > K$ sur $[0; b[$. En raisonnant comme dans

l'exercice précédent, on démontre que $y(t) > K$ sur $[0; a[$ sinon il existerait un réel $0 < s < a$ en lequel $y(s) = K$ et tel que $y(t) > K$ sur $[0; s[$. Ainsi y se confondrait avec m sur $[0; s[$ mais la limite à gauche de m en s ne pouvant être égale à K fournirait une contradiction. Ainsi y se confondrait avec m sur $[0; a[$.

La solution m est inacceptable dans un modèle de croissance de masse car la fonction est strictement décroissante. Le modèle implique donc $m_0 \leq K$

2) Si $m_0 = K$, la fonction constante $m(t) = K$ est une solution maximale sur $[0; +\infty[$
Si $0 < m_0 < K$ alors, en procédant comme au 1) il existe une solution maximale qui a la même expression que précédemment, à savoir :

$$\boxed{\forall\, t \in [0; +\infty[\,:\, m(t) = K\, e^{-Ln\left(\frac{K}{m_0}\right) e^{-r\,t}}}$$

Soit en posant :

$$d = Ln\left(\frac{K}{m_0}\right) > 0$$

$$m(t) = K\, e^{-d\, e^{-r\,t}}$$

$$m'(t) = r\, d\, K\, e^{-r\,t}\, e^{-d\, e^{-r\,t}} > 0$$

m est donc strictement croissante et a pour limite K en $+\infty$. Là encore on démontre que toute solution y sur $[0; a[$ coïncide avec m en notant par continuité en 0 qu'il existe un réel b tel que $0 < b < a$ et $0{,}5\, K < y(t) < K$ sur $[0; b[$ donc y coïncide avec m sur $[0; b[$ donc y ne peut prendre ni la valeur K ni la valeur 0, d'où on déduirait que y coïncide avec m sur $[0; a[$.

<u>Interprétations</u> :

Dans le premier cas $m(t) = K$, l'organisme a terminé sa croissance et atteint sa masse limite. Cette dernière ne varie plus dans le temps. C'est le régime stationnaire.

Dans le second cas $m(t) < K$, l'organisme est en phase de croissance et K représente la masse qu'il va atteindre (en un temps fini d'un point de vue physique, mais infini dans le modèle mathématique)