

## Dérivées successives d'un polynôme

Soit  $P$  un polynôme à coefficients complexes de degré  $n$  défini par :

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Exprimer les dérivées successives de ce polynôme en notation sigma

Réponses :

$$P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

$$P^{(1)}(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$

$$P^{(2)}(x) = \sum_{k=2}^n k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{n-2} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k$$

On peut ainsi conjecturer la propriété pour  $m \leq n$  :

$$P^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^n k(k-1) \dots (k-(m-1)) a_k x^{k-m} = \sum_{k=0}^{n-m} (k+m) \dots (k+1) a_{k+m} x^k$$

Ainsi :

$$P^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^n k(k-1) \dots (k-(n-1)) a_k x^{k-n} = n! a_n$$

et pour tout  $m > n$  :  $P^{(m)}(x) = 0$