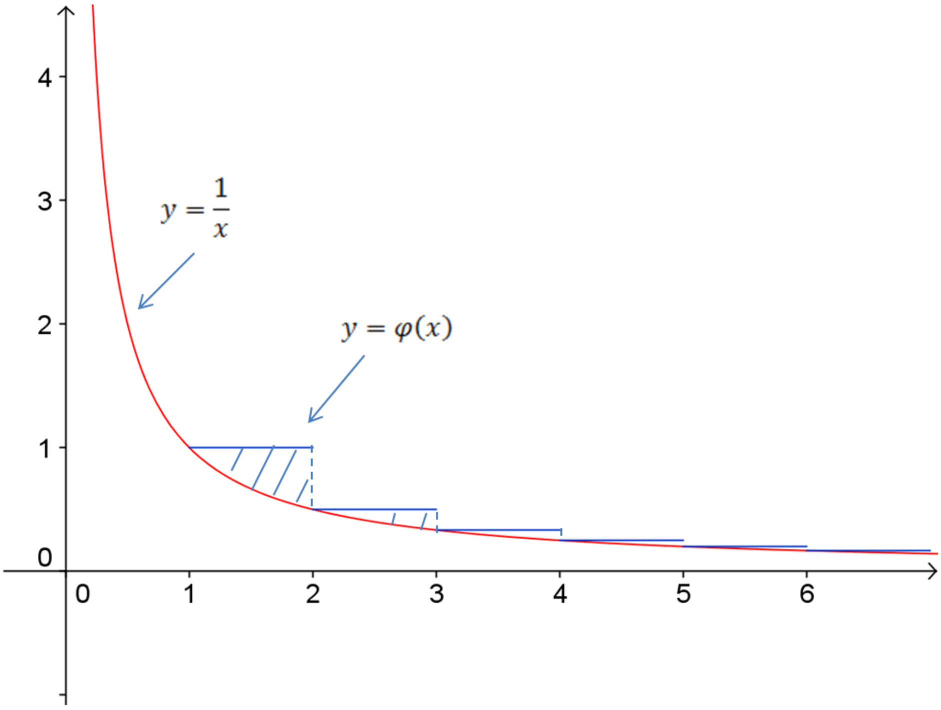
Constante d'Euler – Masheroni

Rappel :

On rappelle la constante d'Euler définie comme étant :

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - Ln(n+1)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - Ln(n)\right)$$

Cette constante s'interprète comme étant l'aire hachurée du graphique ci-dessous.



Questions :

On considère la fonction :

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-x\,t}}{1-e^{-t}}\right)dt$$

1) Déterminer le domaine de définition de ψ

2) Calculer explicitement ? pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-(n+1)\,t}}{1-e^{-t}}\right)dt$$

3) On pose pour $u \in \left]0,+\infty\right[$:

$$F(u) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-u\,t}}{t}\,dt$$

Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$, calculer sa dérivée et en déduire explicitement $F(u)$.

4) On pose :

$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-n\,t} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1-e^{-t}}\right) dt$$

Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$$

5) En déduire :

$$\gamma = -\psi(1)$$

Puis par une intégration par partie adéquate que :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} e^{-\,t}\, Ln(t)\, dt$$

<u>Corrigé</u> :

1) Pour $x \geq 0$:

En 0^+ :

$$\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-x\,t}}{1-e^{-t}} = \frac{e^{-t} - e^{-2\,t} - t\,e^{-x\,t}}{t\,(1-e^{-t})}$$

$$= \frac{\left(1 - t + \frac{1}{2}\,t^2\right) - \left(1 - 2\,t + \frac{1}{2}\,(2\,t)^2\right) - t\,(1 - x\,t) + o(t^2)}{t\,(t + o(t))}$$

$$= \frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)\,t^2}{t^2 + o(t^2)} = x - \frac{3}{2} + o(1)$$

La fonction tend vers une limite finie en 0 donc l'intégrale est convergente.

En$+\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-x\,t}}{1-e^{-t}}\right) = 0$$

Donc l'intégrale est absolument convergente.

Pour $x < 0$ la fonction tend vers $-\infty$ quand t tend vers $+\infty$ donc l'intégrale diverge trivialement.

Ainsi ψ est définie sur $[0,+\infty[$

2) On a :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-(n+1)\,t}}{1-e^{-t}}\right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1-e^{-n\,t}}{1-e^{-t}}\right) dt$$

Faisons le changement de variable :

$$x = e^{-t}, \qquad dx = -e^{-t}\,dt$$

Alors, l'intégrale devient :

$$\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\,dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} x^k\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 x^k\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

3) pour $u \in \,]0,+\infty[$ et $x \in \,]0,+\infty[$, posons :

$$f(u,t) = \frac{e^{-t} - e^{-u\,t}}{t}$$

f est une fonction continue de deux variables sur $]0,+\infty[\, \times \,]0,+\infty[$ admettant sur le même domaine une dérivée partielle par rapport à u qui est continue.

Introduisons alors la suite de fonctions :

$$F_n(u) = \int_0^n \frac{e^{-t} - e^{-u\,t}}{t}\,dt$$

Chacune de ces fonctions est dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$$F_n'(u) = \int_0^n e^{-u\,t}\,dt = \frac{1-e^{-n\,u}}{u}$$

Donc la suite $\left(F_n'(u)\right)$ tend simplement vers la fonction $\frac{1}{u}$ sur $]0,+\infty[$, et uniformément sur tout compact $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$ car :

$$\left|F_n'(u) - \frac{1}{u}\right| \leq \frac{e^{-n\,a}}{b}$$

la quantité majorante tendant vers 0 indépendamment de u.

Donc F est dérivable sur $[a,b]$ et donc sur $]0,+\infty[$ et

$$F'(u) = \frac{1}{u}$$

Notant que $F(1) = 0$, on en déduit :

$$F(u) = \frac{1}{u}$$

4) Considérons la fonction :

$$g(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}$$

Cette fonction est continue et a une limite finie en 0 et en $+\infty$. Elle est donc bornée sur $[0,+\infty[$.

Donc il existe un réel $M>0$ tel que :

$$\forall\, t\in[0,+\infty[\ :\ |g(t)|\leq M$$

Donc :

$$|J_n|\leq\int_0^{+\infty} e^{-n\,t}\,|g(t)|\,dt\leq M\int_0^{+\infty} e^{-n\,t}\ dt=\frac{M}{n}$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} J_n=0$$

5) On a :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-Ln(n+1)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}-e^{-(n+1)t}}{1-e^{-t}}\right)dt-\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}-e^{-(n+1)\,t}}{t}\right)dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}-e^{-(n+1)t}}{1-e^{-t}}-\frac{e^{-t}-e^{-(n+1)\,t}}{t}\right)dt$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}-\frac{e^{-t}}{t}\right)dt+\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)\,t}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right)dt$$

$$=-\psi(1)+J_{n+1}$$

En passant à la limite :

$$\gamma=-\psi(1)$$

6) On a :

$$\psi(1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}\right)dt$$

Faisons une intégration par partie en posant :

$$u=e^{-t},\qquad v'=\frac{1}{t}-\frac{1}{1-e^{-t}}=\frac{1}{t}-\frac{e^{t}}{e^{t}-1}$$

$$u'=-e^{-t},\qquad v=Ln(t)-Ln(e^{t}-1)=Ln\left(\frac{t}{e^{t}-1}\right)$$

$$\psi(1)=\left[e^{-t}\ Ln\left(\frac{t}{e^{t}-1}\right)\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(Ln(t)-Ln(e^{t}-1)\right)dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\, Ln(t)\, dt - \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\, Ln(e^{t} - 1)\, dt$$

Or :

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-t}\, Ln(e^{t} - 1)\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\, Ln\left(e^{t}(1 - e^{-t})\right) dt$$

$$= \int_{0}^{+\infty} t\, e^{-t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\, Ln(1 - e^{-t})\, dt$$

On fait alors une intégration par partie pour la première intégrale et un changement de variable pour la seconde :

$$x = 1 - e^{-t}, \quad dx = e^{-t}\, dt$$

Et la quantité devient :

$$\left([-t\, e^{-t}\ ]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\, dt \right) + \int_{0}^{1} Ln(x)\, dx = 1 + [x\, Ln(x) - x]_{0}^{1} = 1 - 1 = 0$$

Ainsi :

$$-\gamma = \psi(1) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t}\, Ln(t)\, dt$$