Applications conjuguées

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on définit une relation sur $\mathcal{A}$ de la façon suivante :

$$f \mathcal{R} g \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathcal{B} : g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. On qualifiera alors deux fonctions liées par cette relation de conjuguées.
2) Déterminer la classe d'équivalence de l'application identité : $Id : x \to x$ et de l'application nulle : $N : x \to 0$
3) Donner un exemple de fonction f de $\mathcal{A}$ et φ de $\mathcal{B}\backslash\{Id\}$ telles que : $f = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$
4) Pour f dans $\mathcal{A}$, on considère l'ensemble$C_f = \{\varphi \in \mathcal{B} : f = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}\}$
   a) Montrer que C_f n'est pas vide
   b) Montrer que C_f est stable pour la composition et le passage à la réciproque, c'est-à-dire : si φ et ψ sont dans C_f alors $\varphi \circ \psi$ et φ^{-1} le sont aussi.
5) On considère ici deux applications f et g de $\mathcal{A}$ conjuguées. Montrer :
   a) f injective $\Leftrightarrow$ g injective
   b) f surjective $\Leftrightarrow$ g surjective
   c) En notant pour $n \in \mathbb{N} : f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ où f apparait n fois si $n \geq 1$ et $f^0 = Id$, montrer que : $f^n \mathcal{R} g^n$
   d) En notant pour $n \in \mathbb{N}$ et f dans $\mathcal{B}$: $f^{-n} = (f^{-1})^n$ étendre le résultat précédent.
6) On dit qu'un réel a est un point fixe d'une application f de $\mathcal{A}$ si : $f(a) = a$ et on considère deux applications f et g de $\mathcal{A}$ conjuguées
   a) Montrer que si f possède un point fixe alors g aussi
   b) Etablir une bijection entre l'ensemble des points fixes de f et l'ensemble des points fixes de g
   c) Les applications de f et g de $\mathcal{A}$ définies par : $f(x) = e^x - 1$ et $g(x) = e^x$ sont elles conjuguées ?
   d) Mêmes questions avec les applications définies par $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{x+1} - 1$
7) On cherche à savoir si les applications sinus et cosinus sont conjuguées. On suppose pour cela qu'elles le sont, donc : $\exists \varphi \in \mathcal{B} : sin = \varphi \circ cos \circ \varphi^{-1}$
   a) Montrer que $\varphi(-1,1) = [-1,1]$
   b) En analysant l'injectivité des restrictions de cos et $\varphi^{-1} \circ sin \circ \varphi$ conclure

Correction :

1) Montrons que la relation est réflexive, symétrique et transitive

Réflexive : Soit $f \in \mathcal{A}$ alors : $f = Id \circ f \circ Id^{-1}$ donc $f \mathcal{R} f$

Symétrique : Soit $(f, g) \in \mathcal{A}^2$ tels que : $f \mathcal{R} g$ alors : $\exists\ \varphi \in \mathcal{B} : g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ donc

$$\varphi^{-1} \circ g \circ \varphi = f$$

soit encore :

$$\varphi^{-1} \circ g \circ (\varphi^{-1})^{-1} = f$$

Or $\varphi^{-1} \in \mathcal{B}$ donc : $g \mathcal{R} f$

Transitive : Soit $(f, g, h) \in \mathcal{A}^3$ tels que : $f \mathcal{R} g$ et $g \mathcal{R} h$ alors :

$$\exists\ (\varphi, \psi) \in \mathcal{B}^2 : g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}, h = \psi \circ g \circ \psi^{-1}$$

Donc :

$$h = \psi \circ (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ \psi^{-1} = (\psi \circ \varphi) \circ f \circ (\psi \circ \varphi)^{-1}$$

Or : $\psi \circ \varphi \in \mathcal{B}$ donc : $f \mathcal{R} h$

2) Soit $\varphi \in \mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{A}$ alors :

$$f = \varphi \circ Id \circ \varphi^{-1} \Leftrightarrow f = Id$$

La classe de l'application identité est donc réduite à l'identité

$$f = \varphi \circ N \circ \varphi^{-1} \Rightarrow f = \varphi \circ N \Rightarrow \forall\ x \in \mathbb{R} :\ f(x) = \varphi(0)$$

Donc si $f \mathcal{R} N$ alors f est constante. Réciproquement si f est constante égale à c alors il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{B}$ telle que $\varphi(0) = c$, il suffit de prendre pour cela : $\varphi(x) = x + c$ et alors $\varphi^{-1}(x) = x - c$ donc : $\varphi \circ N \circ \varphi^{-1}(x) = \varphi(0) = c = f(x)$ et ainsi $f \mathcal{R} N$

La classe de l'application nulle est donc formée par l'ensemble des applications constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

3) On prend φ définie par $\varphi(x) = x + 1$ ainsi $\varphi^{-1}(x) = x - 1$ et f définie par $f(x) = x + 2$
4)
   a) $Id \in C_f$
   b) Soit $(\varphi, \psi) \in {C_f}^2$ alors :

$$f = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}, f = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$$

Donc :

$$f = \varphi \circ (\psi \circ f \circ \psi^{-1}) \circ \varphi^{-1} = (\varphi \circ \psi) \circ f \circ\ (\varphi \circ \psi)^{-1}$$

Or $\varphi \circ \psi \in \mathcal{B}$ donc $\varphi \circ \psi \in C_f$

En outre si $f \in \mathcal{B}$:

$$f^{-1} = \varphi \circ f^{-1} \circ \varphi^{-1}$$

Donc $f^{-1} \in \mathcal{B}$

5) Soit $(f,g) \in \mathcal{A}^2$ conjuguées alors : $\exists\ \varphi \in \mathcal{B} : g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$

a) Supposons f injective alors :

$$g(x) = g(y) \Rightarrow \varphi\left(f\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right) = \varphi\left(f\left(\varphi^{-1}(y)\right)\right)$$
$$\Rightarrow f\left(\varphi^{-1}(x)\right) = f\left(\varphi^{-1}(y)\right)$$
$$\Rightarrow \varphi^{-1}(x) = \varphi^{-1}(y)$$
$$\Rightarrow\ x = y$$

Donc g est injective. La réciproque est évidente

b) Supposons f surjective et notons d'abord ceci :

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \varphi\left(f\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow \varphi^{-1}(y) = f\left(\varphi^{-1}(x)\right)$$

Soit alors $y \in \mathbb{R}$. Par surjectivité de f, il existe $z \in \mathbb{R} : \varphi^{-1}(y) = f(z)$ et par bijectivité de φ^{-1}, il existe $x \in \mathbb{R} : z = \varphi^{-1}(x)$. Ainsi : $y = g(x)$ et g est surjective.

c) On démontre la propriété suivante par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Si $\exists\ \varphi \in \mathcal{B} : g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ alors $g^n = \varphi \circ f^n \circ \varphi^{-1}$

L'initialisation est triviale pour $n = 0$. On suppose la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$g^{n+1} = g^n \circ g = (\varphi \circ f^n \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}) = \varphi \circ f^n \circ f \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ f^{n+1} \circ \varphi^{-1}$$

Donc la propriété est vraie pour l'entier $n + 1$, ce qui achève la démonstration.

d) Dans le cas où $(f,g) \in \mathcal{B}^2$ sont conjuguées, il suffit de noter que

Si $\exists\ \varphi \in \mathcal{B} : g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ alors $g^n = \varphi \circ f^n \circ \varphi^{-1}$ et $g^{-n} = \varphi \circ f^{-n} \circ \varphi^{-1}$

Ainsi $f^{-n}\ \mathcal{R}\ g^{-n}$

6)

a) Soit $(f,g) \in \mathcal{A}^2$ conjuguées alors : $\exists\ \varphi \in \mathcal{B} : g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$.

On suppose que f admet un point fixe a soit : $f(a) = a$, posons $b = \varphi(a)$ soit $\varphi^{-1}(b) = a$ alors

$$g(b) = \varphi\left(f\left(\varphi^{-1}(b)\right)\right) = \varphi\left(f(a)\right) = \varphi(a) = b$$

Donc g admet un point fixe.

b) En reprenant les notations du a) on peut définir l'application h qui à tout point fixe a de f associe le point fixe $\varphi(a)$ de g. Cette application est de façon évidente injective. Or si b est point fixe de g, sachant : $f = \varphi^{-1} \circ g \circ (\varphi^{-1})^{-1}$ l'étude du a) en remplaçant φ par φ^{-1} montre que $a = \varphi^{-1}(b)$ est point fixe de f. Ainsi $\varphi(a) = b$ donc $h(a) = b$ et h est surjective donc bijective.

c) Une étude aisée montre que f admet un point fixe mais pas g donc ces deux applications ne sont pas conjuguées.

d) Définissons φ par : $\varphi(x) = x - 1$ soit $\varphi^{-1}(x) = x + 1$ alors : $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ donc les deux applications sont conjuguées

7)

a) Soit $x \in [-1,1]$ alors : $\exists\, t \in \mathbb{R} : x = \cos(t)$, $\exists\, y \in \mathbb{R} : t = \varphi^{-1}(y)$ donc :

$$\varphi(x) = \varphi(\cos(\varphi^{-1}(y))) = \sin(y)$$

Donc : $\varphi(x) \in [-1,1]$ et $\varphi([-1,1]) \subset [-1,1]$

Soit $y \in [-1,1]$ alors: $\exists\, t \in \mathbb{R} :\ y = \sin(t) = \varphi(\cos(\varphi^{-1}(t)))$, on pose alors $x = \cos(\varphi^{-1}(t))$ et on a : $y = \varphi(x)$ avec $x \in [-1,1]$ donc : $\varphi([-1,1]) = [-1,1]$

b) On a : $cos = \varphi^{-1} \circ sin \circ \varphi$

Sur $[-1,1]$ la fonction cosinus n'est pas injective donc : $\exists(\, t, t') \in [-1,1]^2 : \cos(t) = \cos(t')$

donc :

$$\varphi^{-1}\big(\sin\big(\varphi(t)\big)\big) = \varphi^{-1}\big(\sin\big(\varphi(t')\big)\big)$$

$$\sin\big(\varphi(t)\big) = \sin\big(\varphi(t')\big)$$

Or la fonction sinus est injective sur $[-1,1]$ donc :

$$\varphi(t) = \varphi(t')$$

Soit :

$$t = t'$$

Ce qui est absurde.

Donc les fonctions sinus et cosinus ne sont pas conjuguées.