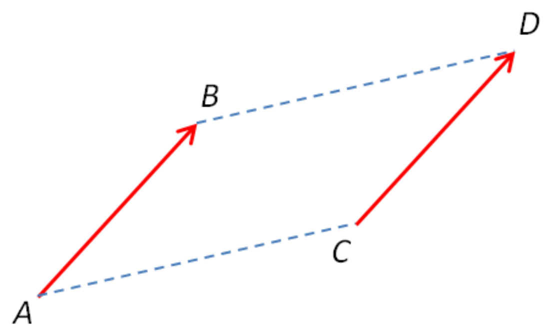
Vecteurs

I Introduction-Définition

La notion de vecteur sous entend la notion de transport. D'ailleurs dans d'autre domaine que les mathématiques, on parle du rat comme d'un vecteur de maladie, d'un missile comme un vecteur de destruction, etc… Comment aborder la notion en Mathématiques, en relation avec le concept de déplacement ?

La façon la plus simple est de considérer un vecteur comme étant une translation du plan ou de l'espace. Ainsi, la translation τ qui transforme un point A en un point B d'un plan est appelée vecteur de ce plan et notée $\overrightarrow{AB}$. Notons que si elle transforme un point C en un point D, on la note également $\overrightarrow{CD}$.



L'écriture $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ traduit alors simplement le fait suivant : $\tau(A) = B,\ \tau(C) = D,$ ce qui se produit si et seulement si le quadrilatère $A\ B\ D\ C$ est un parallélogramme et amène à l'équivalence suivante, à condition de considérer les 4 points confondus comme formant un parallélogramme :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow A\ B\ D\ C \text{ parallélogramme}}$$

Deux opérations sont alors définies sur l'ensemble des vecteurs (d'un plan ou de l'espace), une opération d'addition et une opération de multiplication externe.

La translation appelée **identité du plan** « transforme » chaque point en lui-même et est appelée **vecteur nul**. Ainsi :

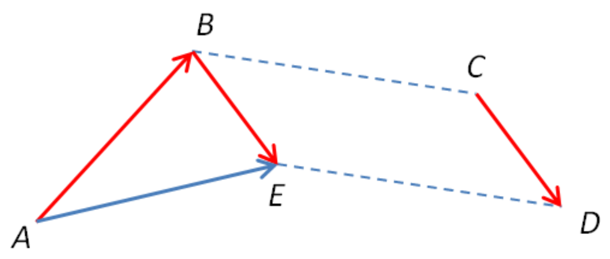
$$\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \cdots$$

La translation qui transforme un point B en un point A est appelée **opposé** de la translation qui transforme A en B (C'est en fait la **translation réciproque**).

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, on not alors $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$

1) Addition de deux vecteurs

Considérons la translation τ qui transforme un point A en un point B dans un plan par exemple, et la translation τ' qui transforme un point C en un point D dans le même plan. Notons E le point image de B par τ'.



Alors la translation τ suivie de la translation τ' est une translation appelée **composée** de τ' et de τ notée $\tau' \circ \tau$ qui transforme A en E. On peut donc la noter $\overrightarrow{AE}$. Par définition, on dira que cette translation est l'addition de τ et de τ' et on décrira cela sous la forme de la **relation de Chasles** :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$$

Cette relation ne traduit que le fait suivant : La translation qui transforme A en B suivie de celle qui transforme B en E est la translation qui transforme A en E. Ce n'est donc pas une propriété mais une définition de l'addition. Nous allons alors voir pourquoi, par ses propriétés, cette opération est qualifiée d'addition. Mais d'abord, précisons qu'un vecteur est généralement noté par un symbole surmonté d'une flèche. Ainsi, la translation τ précédente sera décrite par une écriture du type :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

L'addition des vecteurs présente des propriétés similaires à l'addition des nombres, c'est pour cela qu'on la nomme ainsi. Si on désigne par $\mathbb{V}$ l'ensemble des vecteurs d'un plan (ou de l'espace) nous avons les propriétés suivantes :

<u>Commutativité</u> :

$$\forall\,(\vec{u}\,,\vec{v}\,) \in \mathbb{V}^2 \colon\ \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$

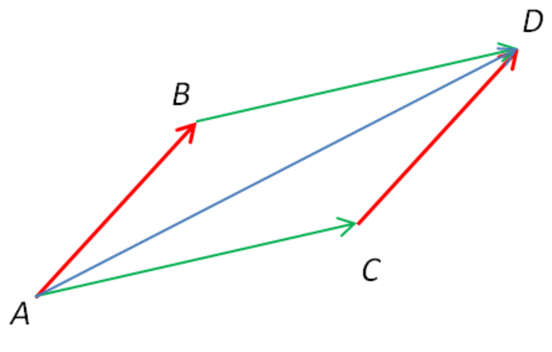
Pour s'en convaincre, il suffit de conisdérer que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{BD}$ et de compléter le triangle $A\ B\ D$ par un point C de telle sorte que $A\ B\ D\ C$ soit un parallélogramme. On a alors :

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$$

$$\vec{v}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$$

$$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$$

$$\vec{v}+\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$$



Pour être plus simple encore, cette propriété traduit la commutativité de la composée de deux translation. Ainsi, qu'on se déplace par exemple d'abord vers l'Est de 2 Km puis vers le Nord de 1 Km revient à se déplacer d'abord de 1 Km vers le Nord puis 2 Km vers l'Est.

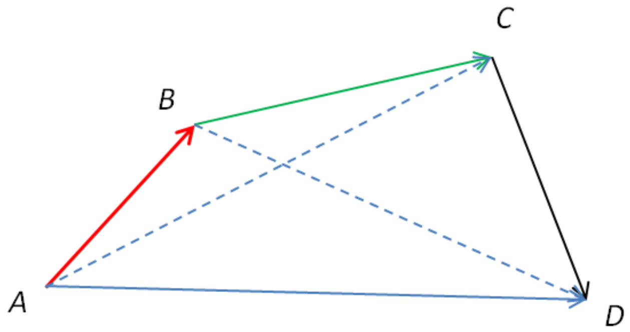
Associativité :

$$\forall\, (\vec{u}\,, \vec{v}\,, \vec{w}\ \ ) \in \mathbb{V}^2 :\ (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \ \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

Pour s'en convaincre, il suffit de conisdérer que si $\vec{u} = \overrightarrow{AB},\ \vec{v} = \overrightarrow{BC},\ \vec{w} = \overrightarrow{CD}$ alors :

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$



Ces deux propriétés conduisent à une écriture sans parenthèses $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ dans laquelle deux quelconques des termes peuvent être additionnés en premier.

Existence d'un élément neutre, le vecteur nul :

$$\forall\, \vec{u} \in \mathbb{V} :\ \ \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

Existence d'un symétrique, l'opposé :

$$\forall\, \vec{u} \in \mathbb{V} :\ \ \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$

Ces propriétés font que $\mathbb{V}$ muni de l'opération d'addition est un **groupe commutatif**. C'est ce qui rapproche le vecteur du nombre et nous verrons plus loin d'ailleurs, que dans un sens plus général, un nombre est un vecteur (à une dimension)

2) Multiplication externe

Si nous nous rappelons que la multiplication se définit dans un sens naturel à partir de l'addition, puisque : $3 \times a = a + a + a$, il parait naturel de poser :

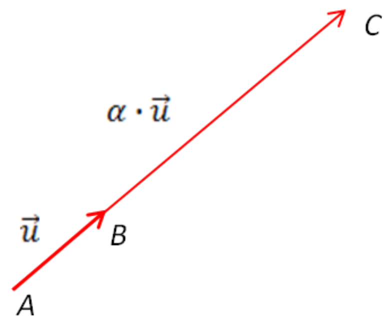
$$\vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 3\,\vec{u}$$

Cela suppose établir une règle de multiplication entre un nombre réel et un vecteur, la multiplication étant qualifiée d'externe.

Soit donc un nombre réel α et un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Définissons $\alpha \cdot \vec{u}$ naturellement ainsi :

<u>Si $\alpha > 0$</u> :

Considérons le point C de la demi-droite $[AB)$ tel que : $AC = \alpha \times AB$.

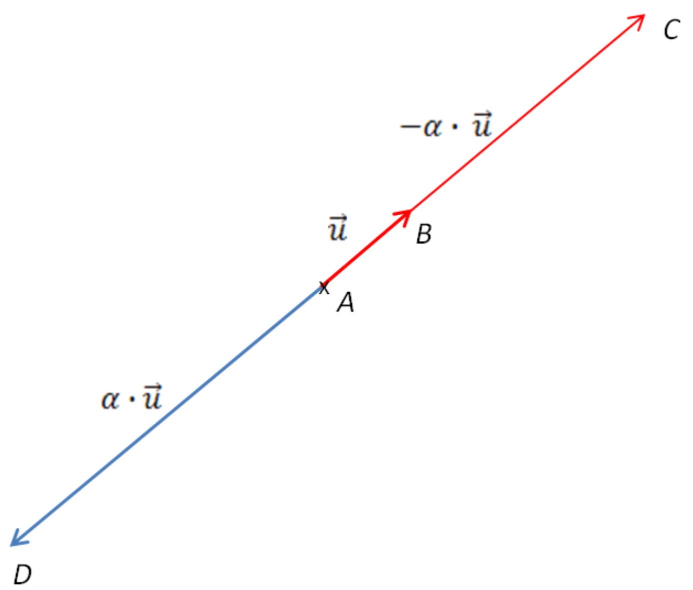


Alors :

$$\alpha \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AC}$$

<u>Si $\alpha < 0$</u> :

Considérons le point D symétrique par rapport à A du point C de la demi-droite $[AB)$ tel que : $AC = -\alpha \times AB$



Alors :

$$-\alpha \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AC}$$

et :

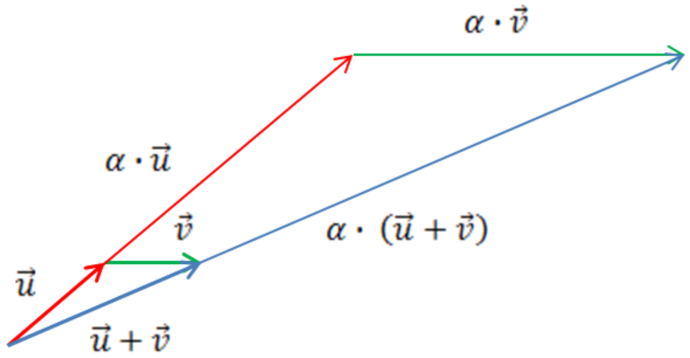
$$\alpha \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AD}$$

La multiplication d'un nombre réel par un vecteur présente des propriétés similaires à la multiplication d'un nombre par un nombre, à savoir :

Distributivité à gauche de $\cdot$ par rapport à $+$

$$\boxed{\forall\ (\alpha\,, \vec{u}\,, \vec{v}\,) \in \mathbb{R} \times \mathbb{V}^2 : \alpha \cdot\ (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}}$$

Cette propriété n'est pas triviale. C'est la traduction, en termes de vecteurs, du théorème de Thalès.



Distributivité à droite de $\cdot$ par rapport à $+$

$$\forall\ (\alpha\,,\beta\,,\vec{u}\,) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{V} :\ (\alpha + \beta) \cdot\ \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$$

Cette propriété est triviale.

Associativité de $\cdot$ et $\times$

$$\forall\ (\alpha\,,\beta\,,\vec{u}\,) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{V} :\ \alpha \cdot (\beta \cdot\ \vec{u}) = (\alpha \times \beta) \cdot \vec{u}$$

Cette propriété est triviale.

Existence d’un élément neutre pour la multiplication

$$\forall\ \vec{u} \in \mathbb{R} :\ 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

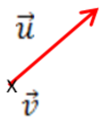
Cette propriété est triviale

II Vecteurs colinéaires et bases

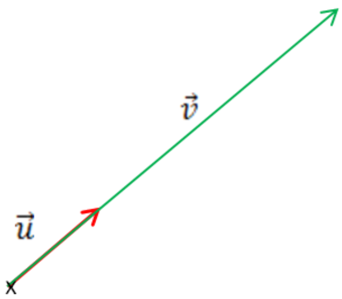
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan ou de l'espace sont dits colinéaires si leurs images d'un même point sont alignées avec ce point. Nous conviendrons d'écrire $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Nous pouvons isoler trois situations de colinéarité pour deux vecteurs.

1) Un des deux vecteurs au moins est nul

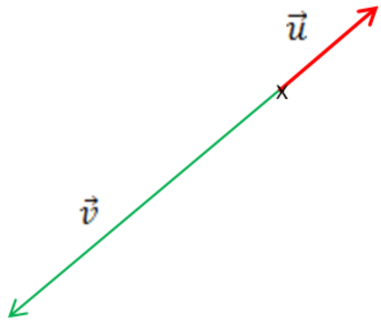


2) Les deux vecteurs sont non nuls et $\exists\ k \in \mathbb{R}^{+*}$: $\vec{u} = k\,\vec{v}$



On dit alors que les deux vecteurs sont **colinéaires de même sens**.

3) Les deux vecteurs sont non nuls et $\exists\ k \in \mathbb{R}^{-*}$: $\vec{u} = k\,\vec{v}$



On dit alors que les deux vecteurs sont **colinéaires et de sens contraires**.

On peut alors constater la caractérisation suivante :

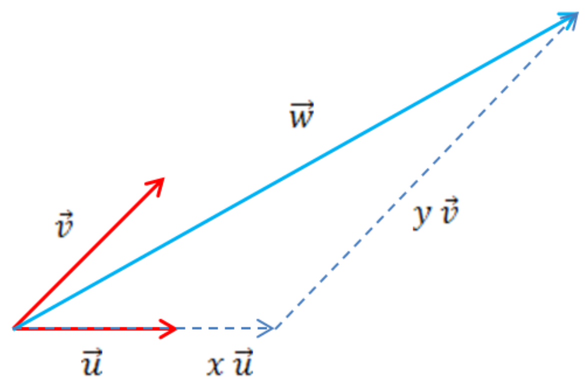
$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R} \;:\; \vec{u} = k\,\vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = k\,\vec{u}$$

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan qui ne sont pas colinéaires présentent la propriété remarquable suivante :

Tout vecteur du plan peut se décomposer comme la somme d'un vecteur colinéaire à $\vec{u}$ et d'un vecteur colinéaire à $\vec{v}$ et cette décomposition est unique.

En langage mathématique, cela s'écrit :

$$\forall\, \vec{w} \in \mathbb{V} \;\exists\,!\,(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \vec{w} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$$



On dit alors du couple de vecteurs $(\vec{u}\,,\vec{v}\,)$ qu'il forme une **base** de vecteurs du plan

Le couple $(x\,,y)$ est appelé **couple de coordonnées** de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}\,,\vec{v}\,)$

Etant donné une base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$ de vecteurs du plan et de vecteurs $\vec{u}\,,\vec{v}$ de coordonnées respectives $(x\,,y)$ et $(x'\,,y')$ dans cette base, la colinéarité de ces vecteurs peut être caractérisée analytiquement par :

$$\boldsymbol{\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow x\,y' = y\,x'}$$

Preuve :

Démontrons l'implication $(\Rightarrow)$ en premier :

Supposons donc $\vec{u} \parallel \vec{v}$, alors :

$\exists\, k \in \mathbb{R} \, : \, \vec{u} = k\, \vec{v} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = k\, \vec{u}$

Donc par disjonction de cas nous avons :

1er cas : $\vec{u} = k\, \vec{v}$

$$x\, \vec{\imath} + y\, \vec{\jmath} = k\, (x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath})$$

$$x\, \vec{\imath} + y\, \vec{\jmath} = k\, x'\, \vec{\imath} + \, k\, y'\, \vec{\jmath}$$

Soit, par unicité des coordonnées :

$$\begin{cases} x = k\, x' \\ y = k\, y' \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} x\, y' = k\, x'y' \\ y\, x' = k\, y'x' \end{cases}$$

Il en résulte : $x\, y' = \, y\, x'$

2 ème cas : $\vec{v} = k\, \vec{u}$

Ce cas se traite de façon analogue au précédent

Cela prouve l'implication

Voyons la réciproque $(\Leftarrow)$

Supposons donc : $x\, y' = \, y\, x'$

Et faisons encore une disjonction de cas :

1er cas : $x' \neq 0$ et $y' \neq 0$

Alors :

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$$

SI on note k ce nombre, on en déduit :

$$\begin{cases} x = k\, x' \\ y = k\, y' \end{cases}$$

Et donc : $x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} = k\,(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath})$

Soit : $\vec{u} = k\,\vec{v}$ donc $\vec{u} \parallel \vec{v}$

<u>2ème cas : $x' = 0$</u>

Alors : $x\,y' = 0$

Donc : $x = 0$ ou $y' = 0$

Là encore, faisons une disjonction de cas :

<u>1er sous- cas : $x = 0$</u>

Alors : $\vec{u} = y\,\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = y'\,\vec{\jmath}$

On a donc bien $\vec{u} \parallel \vec{v}$

<u>2ème sous- cas : $y' = 0$</u>

Alors : $\vec{u} = \vec{0}$ et on a bien $\vec{u} \parallel \vec{v}$

<u>3ème cas : $y' = 0$</u>

Ce cas se traite de façon analogue au précédent

Dans tous les cas $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien colinéaires, ce qui achève la démonstration

III Notion généralisée de vecteur-Espace vectoriel

1) Le nombre comme vecteur

Considérons comme ensemble $\mathbb{V}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Un vecteur $\vec{u}$ est alors simplement un nombre réel, ce qui n'est pas si étrange que cela. Un nombre réel pouvant être représenté par un point sur une droite graduée, on peut l'assimiler à la translation qui transforme l'origine de la droite en ce point.

Les opérations d'addition et de multiplication sur les nombres s'interprètent alors comme des opérations sur d'addition et de multiplication externe sur des vecteurs.

Ainsi, en notant les nombres considérés comme vecteurs surmontés d'une flèche :

$$5 + 2 = \vec{5} + \vec{2} = \vec{7} = 7$$

$$5 \times 2 = 5 \cdot \vec{2} = \overrightarrow{10} = 10$$

Noter que dans la seconde écriture, celle du produit, seul le second nombre est considéré comme vecteur.

2) Le couple de nombres comme vecteur

Considérons comme ensemble $\mathbb{V}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de nombres réels. Un vecteur $\vec{u}$ est alors simplement un couple de nombres réels, ce qui n'est pas si étrange que cela. Plaçons nous en effet dans un plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \mathrm{I}, \mathrm{J})$. Tout point M de ce plan peut alors être caractérisé par son couple (x, y) de coordonnées dans ce repère, c'est-à-dire vérifiant :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{x}\,\overrightarrow{\mathrm{OI}} + \mathrm{y}\,\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$$

Tout point M définit alors un unique vecteur $\vec{\mathrm{u}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dont les composantes dans la base $\left(\overrightarrow{\mathrm{OI}}, \overrightarrow{\mathrm{OJ}}\right)$ sont définies par le couple (x, y)

Si nous considérons alors deux vecteurs $\vec{\mathrm{u}}$ et $\vec{\mathrm{v}}$ et α un nombre réel, nous avons, pour leurs composantes dans la base précédente:

- Composantes de $\vec{\mathrm{u}}$: (x, y)

- Composantes de $\vec{v}$: (x', y')
- Composantes de $\vec{u} + \vec{v}$: $(x + x', y + y')$
- Composantes de $\alpha \cdot \vec{u}$: $(\alpha x, \alpha y)$

Nous sommes alors naturellement amenés à pouvoir considérer un couple de nombres réel comme un vecteur, en définissant l'addition et la multiplication externe suivante :

$$\mathbf{(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{(x, y)} = (\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{y})$$

Allons plus loin. Nous verrons ultérieurement, avec l'introduction des matrices, qu'il est plus pratique de disposer les composantes d'un vecteur dans une base en colonne. De telles colonnes peuvent alors être considérées comme des vecteurs avec les opérations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{x'} \\ \mathbf{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x + x'} \\ \mathbf{y + y'} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{x} \\ \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{y} \end{pmatrix}$$

L'ensemble $\mathbb{V}$ formé par ces colonnes est appelé ensemble de matrices uni-colonnes à deux lignes et est noté :

$$\boldsymbol{\mathcal{M}_{21}}(\mathbb{R})$$

3) Le triplet de nombres comme vecteur

De façon analogue à ce qui a été fait précédemment, mais en considérant des vecteurs de l'espace cette fois-ci, on peut considérer les triplets de nombres réels de $\mathbb{R}^3$ comme des vecteurs, avec les opérations :

$$\mathbf{(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{(x, y, z)} = (\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{z})$$

Mais nous pouvons également considérer comme vecteurs les colonnes de trois nombres réels de l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{M}_{31}}(\mathbb{R})$ **avec les opérations :**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{x'} \\ \mathbf{y'} \\ \mathbf{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x + x'} \\ \mathbf{y + y'} \\ \mathbf{z + z'} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{x} \\ \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{y} \\ \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{z} \end{pmatrix}$$

4) Le n-uplet de nombres comme vecteur

De façon plus générale, nous pourrons considérer comme vecteurs, les n-uplets de nombres réels de $\mathbb{R}^n$, avec les opérations :

$$(\mathbf{x_1}\,, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n}) + (\mathbf{x'_1}\,, \mathbf{x'_2}, \dots, \mathbf{x'_n}) = (\mathbf{x_1} + \mathbf{x'_1}\,, \mathbf{x_2} + \mathbf{x'_2}, \dots, \mathbf{x_n} + \mathbf{x'_n})$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{x_1}\,, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_n}) = (\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{x_1}\,, \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{x_2}, \dots, \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{x_n})$$

Mais nous pouvons également considérer comme vecteurs les colonnes de n nombres réels de l'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{M}}_{\mathbf{n1}}(\mathbb{R})$ **avec les opérations :**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \vdots \\ \mathbf{x_n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{x'_1} \\ \mathbf{x'_2} \\ \vdots \\ \mathbf{x'_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} + \mathbf{x'_1} \\ \mathbf{x_2} + \mathbf{x'_2} \\ \vdots \\ \mathbf{x_n} + \mathbf{x'_n} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \vdots \\ \mathbf{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{x_1} \\ \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{x_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{x_n} \end{pmatrix}$$

5) La suite de nombres réels comme vecteur

Soyons fou ! Nous sommes tentés d'aller plus loin dans le concept de vecteurs en considérant que l'extension d'un n-uplets est une suite de nombres infinie. Nous sommes donc amenés à considérer les suites de nombres réels comme des vecteurs avec les opérations :

$$(\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}, \dots) + (\mathbf{x'_0}, \mathbf{x'_1}, \dots, \mathbf{x'_n}, \dots) = (\mathbf{x_0} + \mathbf{x'_0}, \mathbf{x_1}, +\mathbf{x'_1}, \qquad \dots, \mathbf{x_n} + \mathbf{x'_n}, \dots)$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{x_0}, \mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_n}, \dots) = (\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{x_0}, \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{x_1}, \dots, \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{x_n}, \dots)$$

Ce que l'on pourra encore écrire de façon simplifiée :

$$(\mathbf{x_n}) + (\mathbf{x'_n}) = (\mathbf{x_n} + \mathbf{x'_n})$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{x_n}) = (\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{x_n})$$

6) La fonction réelle à variable réelle comme vecteur

Notant qu'une suite de nombres réels est, du point de vue mathématique, une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, nous somme amenés à considérer de telles fonctions comme des vecteurs avec les opérations :

$$\mathbf{f} + \mathbf{g} : \quad \mathbf{x} \to \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{f} : \quad \mathbf{x} \to \boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

Plein d'autres objets mathématiques, comme les matrices ou les fonctions de plusieurs variables peuvent ainsi être considérés comme des vecteurs.

Cela amène au concept d'espace vectoriel