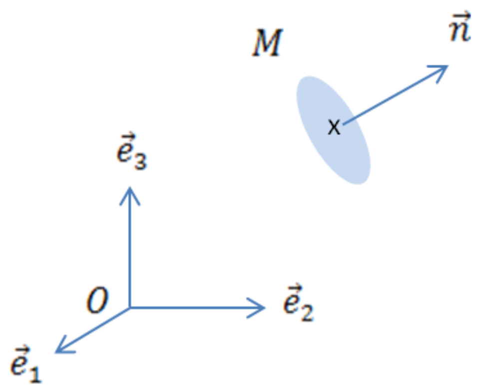
Le vecteur contrainte en mécanique des milieux continus

1) <u>Notion de milieu continu et de vecteur contrainte</u>

Soit un milieu, liquide comme l'eau d'un lac, solide comme une poutre d'acier ou une dalle en béton, ou gazeux comme de l'air. Un tel milieu est qualifié de milieu continu. Plaçons nous en un point $M(x_1, x_2, x_3)$ intérieur à ce milieu, un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ayant été défini. Considérons une petite facette, de forme quelconque et de surface infinitésimale dS contenant ce point M et considérons un vecteur $\vec{n}$ normal à cette surface.



Posons :

$$\vec{n} = \alpha_1\,\vec{e}_1 + \alpha_2\,\vec{e}_2 + \alpha_3\,\vec{e}_3$$

La normale $\vec{n}$ crée deux demi-espaces situés de part et d'autre du plan de la facette. Notons *I* la portion de milieu continu située dans le demi-espace vers lequel pointe $\vec{n}$ et *II* celle située dans l'autre demi-espace. Les particules matérielles du milieu *I* exercent une force infinitésimale $\overrightarrow{df}$ sur celles du milieu *II*. Par définition, on appelle vecteur contrainte au point M associé à la normale $\vec{n}$, le vecteur :

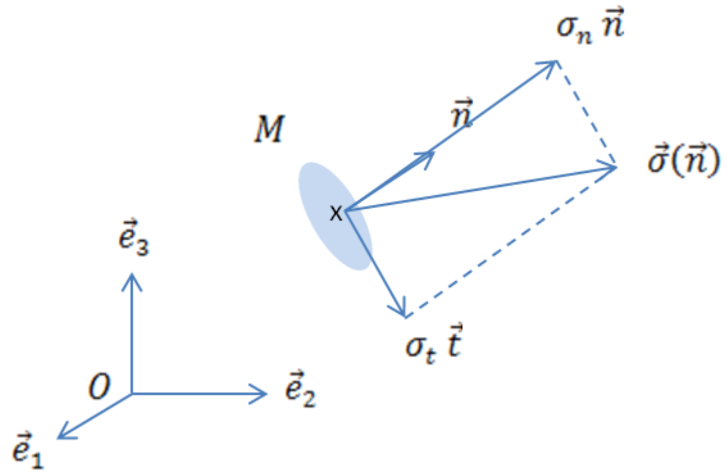
$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = \frac{\overrightarrow{df}}{dS}$$

Remarquons que dans le cas d'un fluide non visqueux, l'air par exemple, on a :

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = -p\,\vec{n}$$

p désignant la pression au point M. Mais de façon générale, $\sigma(\vec{n})$ n'est pas colinéaire à $\vec{n}$ et se décompose en un vecteur normal à la surface et un vecteur tangent :

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = \sigma_n \, \vec{n} + \sigma_t \, \vec{t}$$



σ_n et σ_t sont appelées respectivement contrainte normale et contrainte tangentielle.

En prenant pour normale les trois vecteurs de base, nous définissons des vecteurs contrainte de référence :

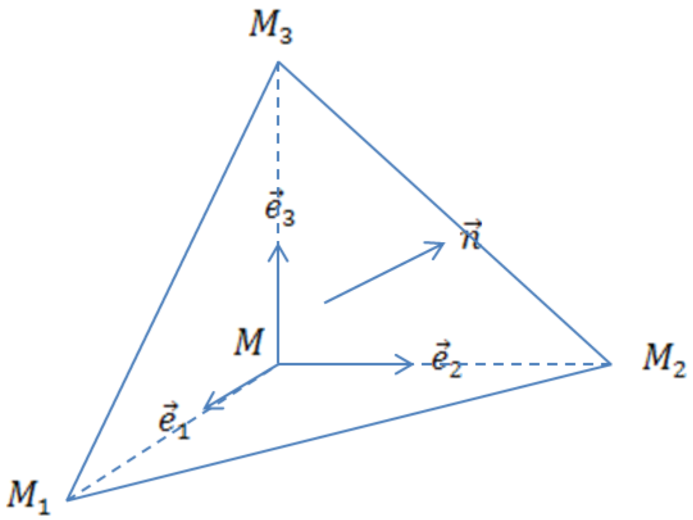
$$\vec{\sigma}_1 = \vec{\sigma}(\vec{e}_1) \;, \vec{\sigma}_2 = \vec{\sigma}(\vec{e}_2) \,, \vec{\sigma}_3 = \vec{\sigma}(\vec{e}_3)$$

Le principe de l'action et de la réaction montre alors que :

$$\vec{\sigma}(-\vec{e}_1) = -\vec{\sigma}_1 \;, \vec{\sigma}(-\vec{e}_2) = \; -\vec{\sigma}_2 \,, \vec{\sigma}(-\vec{e}_3) = -\,\vec{\sigma}_3$$

2) <u>Expression du vecteur contrainte en fonction des vecteur contrainte de référence</u>

Considérons au point M précédent un tétraèdre formé sur les directions de référence de la façon suivante : On place un point $M_1(x_1 + dx_1, 0{,}0)$ sur l'axe $(M, \vec{e}_1)$, un point $M_2(0, x_2 + dx_2, 0)$ sur l'axe $(M, \vec{e}_2)$ et point $M_3(0{,}0, x_3 + dx_3)$ sur l'axe $(M, \vec{e}_3)$.



Ecrivons alors que le système matériel formé par le tétraèdre est en équilibre sous l'action des forces exercées par la portion extérieure de milieu continu et qui sont :

- La force exercée sur la facette triangulaire $M\ M_2\ M_3$ de normale $-\vec{e}_1$ d'aire dS_1:
$$\overrightarrow{df_1} = \vec{\sigma}(-\vec{e}_1)\ dS_1 = -\vec{\sigma}_1\ dS_1$$
- La force exercée sur la facette triangulaire $M\ M_1\ M_3$ de normale $-\vec{e}_2$ d'aire dS_2:
$$\overrightarrow{df_2} = \vec{\sigma}(-\vec{e}_2)\ dS_2 = -\vec{\sigma}_2\ dS_2$$
- La force exercée sur la facette triangulaire $M\ M_1\ M_2$ de normale $-\vec{e}_3$ d'aire dS_3:
$$\overrightarrow{df_3} = \vec{\sigma}(-\vec{e}_3)\ dS_3 = -\vec{\sigma}_3\ dS_3$$
- La force exercée sur la facette triangulaire $M_1\ M_2\ M_3$ de normale $\vec{n}$ d'aire dS:
$$\overrightarrow{df} = \vec{\sigma}(\vec{n})\ dS$$
- La force exercée sur le volume du tétraèdre (par exemple, son poids)
$$\overrightarrow{d\varphi} = \vec{\varphi}\ dV$$

Ainsi dans le cas du poids, on aurait, en notant ρ la masse volumique du milieu au point M :

$$\overrightarrow{d\varphi} = \rho\ \vec{g}\ dV$$

et donc :

$$\vec{\varphi} = \rho\ \vec{g}$$

$\vec{\varphi}$ est qualifié de vecteur force volumique au point. Il est généralement le fait de forces s'exerçant à distance (forces électromagnétiques ou gravitationnelles)

Ecrivons alors l'équilibre du tétraèdre :

$$\overrightarrow{df_1} + \overrightarrow{df_2} + \overrightarrow{df_3} + \overrightarrow{df} + \overrightarrow{d\varphi} = \vec{0}$$

Soit :

$$-\vec{\sigma}_1\ dS_1 - \vec{\sigma}_2\ dS_2 - \vec{\sigma}_3\ dS_3 + \vec{\sigma}(\vec{n})\ dS + \vec{\varphi}\ dV = \vec{0}$$

Soit :

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = \vec{\sigma}_1\ \frac{dS_1}{dS} + \vec{\sigma}_2\ \frac{dS_2}{dS} + \vec{\sigma}_3\ \frac{dS_3}{dS} - \vec{\varphi}\ \frac{dV}{dS}$$

Reste à évaluer les différentes surfaces et le volume en fonction de dx_1, dx_2, dx_3. On a :

$$dS_1 = \frac{1}{2}\ dx_2\ dx_3$$

$$dS_2 = \frac{1}{2}\ dx_1\ dx_3$$

$$dS_3 = \frac{1}{2}\ dx_1\ dx_2$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3} = 2\ dS\ \vec{n}$$

Or :

$$\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3} \begin{pmatrix} -dx_1 \\ dx_2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -dx_1 \\ 0 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_2\ dx_3 \\ dx_1\ dx_3 \\ dx_1\ dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ dS_1 \\ 2\ dS_2 \\ 2\ dS_3 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$\vec{n} \begin{pmatrix} \alpha_1 = \dfrac{dS_1}{dS} \\ \alpha_2 = \dfrac{dS_2}{dS} \\ \alpha_3 = \dfrac{dS_3}{dS} \end{pmatrix}$$

De plus :

$$dV = \frac{1}{3}\ dS_3\ dx_3 = \frac{1}{6}\ dx_1\ dx_2\ dx_3$$

$$dS = \frac{1}{2}\ \left\|\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}\right\| = \frac{1}{2}\ \sqrt{(dx_2\ dx_3)^2 + (dx_1\ dx_3)^2 + (dx_1\ dx_2)^2}$$

Donc :

$$\frac{dV}{dS} = \frac{\frac{1}{6}\ \ dx_1\ dx_2\ dx_3}{\frac{1}{2}\ \sqrt{(dx_2\ dx_3)^2 + (dx_1\ dx_3)^2 + (dx_1\ dx_2)^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{{dx_1}^2\ {dx_2}^2\ {dx_3}^2}{{dx_2}^2\ {dx_3}^2 + {dx_1}^2\ {dx_3}^2 + {dx_1}^2\ {dx_2}^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{{dx_1}^2} + \frac{1}{{dx_2}^2} + \frac{1}{{dx_3}^2}}}$$

dx_1, dx_2 , dx_3 étant des infiniments petits, $\frac{dV}{dS}$ est également un infiniment petit. Ainsi :

$$\boxed{\vec{\sigma}(\vec{n}) = \alpha_1 \vec{\sigma}_1 + \alpha_2\ \vec{\sigma}_2 + \alpha_3\ \vec{\sigma}_3}$$

Le vecteur contrainte au point M pour une normale $\vec{n}$ s'exprime donc comme une combinaison linéaire des vecteur contrainte de référence, les coefficients de la combinaison étant les composantes de la normale dans la base de référence.

Remarque :

Pour ceux qui seraient incommodés par les notations différentielles dx_1, dx_2, dx_3, vous pouvez toujours vous placer dans un cas particulier et poser :

$$dx_1 = dx_2 = \ dx_3 = h > 0$$

auquel cas :

$$dV = \frac{1}{6}\ h^3$$

$$dS = \frac{1}{2}\ \sqrt{3\ h^2} = h\ \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ainsi :

$$\frac{dV}{dS} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\ h$$

et :

$$\lim_{h \to 0} \frac{dV}{dS} = 0$$

3) <u>Tenseur des contraintes en un point</u>

Posons :

$$\vec{\sigma}_1 \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} \quad , \qquad \vec{\sigma}_2 \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\sigma}_3 \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad \vec{\sigma}(\vec{n}) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

La relation précédente, s'écrit pour les colonnes de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$ est appelée tenseur des contraintes au point X

<u>Remarque</u> :

Nous avons adopté la notation conventionnelle mathématiques, le premier indice indiquant le numéro de ligne et le second le numéro de colonne mais en mécanique des milieux continus, il arrive fréquemment que ce soit la convention inverse qui soit adoptée, ce qui n'est pas très gênant car on peut montrer que la matrice est symétrique ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$).