Résolution des équations du troisième degré

Problématique :

On se propose de résoudre les équations du type :

$$a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0$$

où a, b, c, d sont quatre nombres complexes et $a \neq 0$.

En divisant par a on peut se ramener à une équation du type :

$$x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0$$

Equation canonique :

Faisons alors un changement d'inconnue en posant :

$$x = X + m$$

où m est un complexe qui sera choisi plus tard et X la nouvelle inconnue. L'équation devient :

$$(X+m)^3 + b\,(X+m)^2 + c\,(X+m) + d = 0$$

Soit en développant :

$$X^3 + 3\,m\,X^2 + 3\,m^2\,X + m^3 + b\,(X^2 + 2\,m\,X + m^2) + c\,X + c\,m + d = 0$$

Puis :

$$X^3 + (3\,m + b)\,X^2 + (3\,m^2 + 2\,b\,m + c)\,X + m^3 + b\,m^2 + c\,m + d = 0$$

Si on choisit alors m tel que $3\,m + b = 0$ alors l'équation se met pour la nouvelle inconnue, sous la forme canonique :

$$\boxed{X^3 - p\,X + q = 0}$$

Résolution de l'équation canonique :

$$X^3 - p\,X + q = 0 \Leftrightarrow \exists\,(u,v) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} X^3 - p\,X + q = 0 \\ X = u + v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\,(u,v) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} (u+v)^3 - p\,(u+v) + q = 0 \\ X = u + v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\,(u,v) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} u^3 + 3\,u^2\,v + 3\,u\,v^2 + v^3 - p\,(u+v) + q = 0 \\ X = u + v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\,(u,v) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} u^3 + v^3 + (3\,u\,v - p)\,(u+v) + q = 0 \\ X = u + v \end{cases}$$

A ce stade, il apparait intéressant de rajouter une condition supplémentaire sur (u,v) :

$$X^3 - p\,X + q = 0 \Leftrightarrow \exists\,(u,v) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} u^3 + v^3 + (3\,u\,v - p)\,(u+v) + q = 0 \\ X = u + v \\ 3\,u\,v - p = 0 \end{cases}$$

A noter que la proposition suivante sur la variable X est une tautologie :

$$\exists\,(u,v)\in\mathbb{C}^2 : \begin{cases} X = u+v \\ 3\,u\,v - p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \exists\,(u,v)\in\mathbb{C}^2 : \begin{cases} u+v = X \\ u\,v = \dfrac{p}{3} \end{cases}$$

En effet, deux nombres étant donnés, il existe toujours deux nombres dont la somme est égale à l'un de ces nombres et le produit à l'autre. Cela justifie l'introduction de la condition supplémentaire $3\,u\,v - p = 0$ dans le système précédent. Ainsi :

$$X^3 - p\,X + q = 0 \Leftrightarrow \exists\,(u,v)\in\mathbb{C}^2 : \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ X = u+v \\ u\,v = \dfrac{p}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\,(u,v)\in\mathbb{C}^2 : \begin{cases} X = u+v \\ u^3 + v^3 = -q \\ u^3\,v^3 = \dfrac{p^3}{27} \\ u\,v = \dfrac{p}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists\,(u,v)\in\mathbb{C}^2 : \begin{cases} X = u+v \\ (u^3, v^3) = couple\ de\ racines\ du\ polynôme : \\ Y^2 + q\,Y + \dfrac{p^3}{27} \\ u\,v = \dfrac{p}{3} \end{cases}$$

Posons :

$$\Delta = q^2 - 4\,\frac{p^3}{27}$$

Et notons δ un complexe tel que : $\delta^2 = \Delta$ ainsi que :

$$y_1 = \frac{-q-\delta}{2}, \qquad y_2 = \frac{-q+\delta}{2}$$

Et u_0, v_0 deux complexes tels que :

$${u_0}^3 = y_1, \qquad {v_0}^3 = y_2$$

Puisqu'ils vérifient ${u_0}^3\,{v_0}^3 = \frac{p^3}{27}$ on peut toujours les choisir tels que :

$$u_0\,v_0 = \frac{p}{3}$$

Alors :

$$X^3 - p\,X + q = 0 \Leftrightarrow \exists\,(u,v)\in\mathbb{C}^2 : \begin{cases} X = u+v \\ (u^3, v^3) = ({u_0}^3, {v_0}^3)\ ou\ (u^3, v^3) = ({v_0}^3, {u_0}^3) \\ u\,v = \dfrac{p}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\,(u,v) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} X = u + v \\ \left(\left(\dfrac{u}{u_0}\right)^3, \left(\dfrac{v}{v_0}\right)^3\right) = (1,1) \\ u\,v = \dfrac{p}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\,(u,v) \in \mathbb{C}^2 : \begin{cases} X = u + v \\ u \in \left\{u_0, u_0\, e^{i\frac{2\pi}{3}}, u_0\, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right\}, v \in \left\{v_0, v_0\, e^{i\frac{2\pi}{3}}, v_0\, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right\} \\ u\,v = \dfrac{p}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\,(u,v) \in \mathbb{C}^2$$

$$: \begin{cases} X = u + v \\ (u,v) = (u_0, v_0)\ ou\ (u,v) = \left(u_0\, e^{i\frac{2\pi}{3}}, v_0\, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right) ou\ (u,v) = \left(u_0\, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, v_0\, e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \ X \in \left\{u_0 + v_0, u_0\, e^{i\frac{2\pi}{3}} + v_0\, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, u_0\, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, v_0\, e^{i\frac{2\pi}{3}}\right\}$$

<u>**Résumé**</u> :

L'équation complexe du troisième degré en X :

$$\boldsymbol{X^3 - p\,X + q = 0}$$

a pour ensemble de solutions complexes :

$$\boldsymbol{\left\{u_0 + v_0, u_0\, e^{i\frac{2\pi}{3}} + v_0\, e^{-i\frac{2\pi}{3}}, u_0\, e^{-i\frac{2\pi}{3}} + v_0\, e^{i\frac{2\pi}{3}}\right\}}$$

où u_0, v_0 sont définis par :

$$\boldsymbol{{u_0}^3 = \frac{-q-\delta}{2}, \qquad {v_0}^3 = \frac{-q+\delta}{2}, \quad u_0\, v_0 = \frac{p}{3}}$$

$$\boldsymbol{\delta^2 = q^2 - 4\,\frac{p^3}{27} = \frac{27\,q^2 - 4\,p^3}{27}}$$

Dans le cas où p et q sont réels, il y a deux cas :

<u>**1er cas : $4\,p^3 - 27\,q^2 \leq 0$:**</u>

u_0 et v_0 sont réels et l'équation admet 1 solution réelle $X_1 = u_0 + v_0$ et deux solutions complexes conjuguées :

$$\boldsymbol{X_2 = (u_0 + v_0)\cos\left(\frac{2\,\pi}{3}\right) + i\,(u_0 - v_0)\sin\left(\frac{2\,\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}(u_0 + v_0)\ + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0)}$$

$$\boldsymbol{X_3 = \frac{-1}{2}(u_0 + v_0) - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0)}$$

2ème cas : $\underline{4\,p^3 - 27\,q^2 > 0}$:

u_0 et v_0 sont deux complexes non réels conjugués et l'équation n'admet que des solutions réelles (une ou deux) qui sont :

$$\boldsymbol{X_1 = 2\,Re(u_0)}$$

$$\boldsymbol{X_2 = 2\,Re\left(u_0\,e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)}$$

$$\boldsymbol{X_3 = 2\,Re\left(u_0\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)}$$

<u>Inconvénient de la méthode dans certains cas :</u>

Considérons l'équation :

$$X^3 + 5\,X - 6 = 0$$

Cette équation peut être facilement résolue car 1 est racine évidente, donc elle équivaut à :

$$(X-1)(X^2 + X + 6) = 0$$

Le discriminant du second facteur est :

$$1 - 24 = -23$$

Les solutions sont donc :

$$1, \frac{-1 - i\sqrt{23}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{23}}{2}$$

Vérifions que nous retrouvons ces valeurs avec la méthode précédente où $p = -5, q = -6$ mais par une méthode bien plus compliquée et avec des solutions qui ne 's'explicitent pas de façon simple nécessairement.

$$\delta^2 = q^2 - 4\,\frac{p^3}{27} = 36 + 4\,\frac{125}{27} = \frac{972}{27} + \frac{500}{27} = \frac{1472}{27} = \frac{64 \times 23}{27}$$

$$\delta = \frac{8\sqrt{23}}{3\sqrt{3}}$$

$${u_0}^3 = 3 - \frac{4\sqrt{23}}{3\sqrt{3}}, \qquad {v_0}^3 = 3 + \frac{4\sqrt{23}}{3\sqrt{3}}, \qquad u_0\,v_0 = \frac{-5}{3}$$

Donc :

$$u_0 = \left(3 - \frac{4\sqrt{23}}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}, v_0 = \left(3 - \frac{4\sqrt{23}}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

A ce stade, et c'est là un inconvénient majeur de cette méthode, il faut remarquer (en recalculant les cubes de ces valeurs) que :

$$u_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{3}}, \qquad v_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{3}}$$

Nous retrouvons donc bien 1 comme solution en considérant $u_0 + v_0$. Les deux autres solutions sont conjuguées, l'une d'elle étant :

$$u_0\, e^{i\frac{2\pi}{3}} + v_0\, e^{-i\frac{2\pi}{3}} = (u_0 + v_0)\, cos\left(\frac{2\,\pi}{3}\right) + i\,(u_0 - v_0)\, sin\left(\frac{2\,\pi}{3}\right) =$$

$$\frac{-1}{2}(u_0 + v_0)\ + i\ \frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0)$$

$$= -\frac{1}{2} - i\ \frac{\sqrt{23}}{2}$$

Nous retrouvons bien les valeurs obtenues avec la première méthode, mais d'une façon bien moins aisée.

On retiendra qu'il faut donc éviter le plus possible cette méthode, en cherchant des solutions évidentes par exemple entières.

<u>Exemple sans solution simple :</u>

Soit à résoudre :

$$x^3 + 3\,x^2 - x + 7 = 0$$

Vérifions qu'il n'y a pas de solution entière. Si x était solution entière relative alors :

$$x^3 + 3\,x^2 - x = -7$$

Donc :

$$x\,(x^2 + 3\,x - 1) = -7$$

Donc x divise -7, donc vaut soit, 1,-1, 7 ou -7. On vérifie alors qu'aucune de ces valeurs n'est solution.

Faisons alors le changement de variable :

$$x = X - \frac{b}{3} = X - \frac{3}{3} = X - 1$$

L'équation devient :

$$X^3 - 4\,X + 10 = 0$$

Donc :

$$p = 4, \qquad q = 10$$

$$\delta^2 = q^2 - 4\,\frac{p^3}{27} = 100 - 4\,\frac{64}{27} = \frac{2700 - 256}{27} = \frac{2444}{27}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{4 \times 611}{3 \times 9}} = \frac{2}{3}\,\sqrt{\frac{611}{3}}$$

$${u_0}^3 = \frac{1}{2}\left(-10 - \frac{2}{3}\,\sqrt{\frac{611}{3}}\right) = -5 - \frac{1}{3}\,\sqrt{\frac{611}{3}}, \qquad {v_0}^3 = -5 + \frac{1}{3}\,\sqrt{\frac{611}{3}}, \qquad u_0\,v_0 = \frac{4}{3}$$

$$u_0 = \sqrt[3]{-5 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{611}{3}}}, \qquad v_0 = \sqrt[3]{-5 + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{611}{3}}}$$

Les solutions complexes sont donc :

$$u_0 + v_0, \qquad \frac{-1}{2}(u_0 + v_0) + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0), \qquad \frac{-1}{2}(u_0 + v_0) - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0)$$

Il y a donc une solution réelle et deux solutions complexes conjuguées.