Les triplets pythagoriciens

I Approche géométrique :

On cherche à déterminer tous les triangles rectangles ayant des côtés mesurables par des nombres entiers naturels

Le théorème de Pythagore donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle A, B, C soit rectangle en B à savoir :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Le problème revient donc à déterminer tous les triplets (x, y, z) d'entiers naturels non nuls vérifiant :

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Ces triplets sont qualifiés de **triplets pythagoriciens**.

II Détermination des triplets pythagoriciens

Commençons par noter que si un triplet (x, y, z) est pythagoricien, alors en notant d le plus grand diviseur commun de ces 3 nombres, et en posant $x = d\ x', y = d\ x', z = d\ z'$ on a :

$$(d\ x')^2 + (d\ y')^2 = (d\ z')^2$$

Donc :

$$x'^2 + y'^2 = z'^2$$

Ainsi, le triplet (x', y', z'), formé de nombres premiers entre eux dans leur ensemble, est pythagoricien

Réciproquement, si (x', y', z') est un triplet pythagoricien formé de nombres premiers entre eux dans leur ensemble, alors pour tout entier naturel non nul d, le triplet $(d\ x', d\ y', d\ z')$ est pythagoricien.

Si on note $\mathbb{E}$ l'ensemble des triplets pythagoriciens et $\mathbb{E}_1$ l'ensemble des triplets pythagoriciens formés de nombres premiers dans leur ensemble, alors :

$$\mathbb{E} = \{(d\ x, d\ y, d\ z) : d \in \mathbb{N}^*, (x, y, z) \in \mathbb{E}_1\}$$

Il suffit donc de chercher les triplets de l'ensemble $\mathbb{E}_1$.

Un exemple : Le triplet $(3, 4, 5)$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

A noter que les deux premiers nombres ont des parités opposées. Voyons s'il en est toujours de même.

Supposons x et y pairs. Alors $x^2 + y^2$ est pair donc z^2 donc z. Donc les trois nombres sont divisibles par 2 ce qui est absurde.

Supposons x et y impairs. Alors $x^2 + y^2$ est pair donc z^2 donc z. Donc les trois nombres sont de la forme :

$$x = 2\,x' + 1, \qquad y = 2\,y' + 1, \qquad z = 2\,z'$$

Ainsi :

$$(2\,x' + 1)^2 + (2\,y' + 1)^2 = (2\,z')^2$$

Soit, en développant :

$$4\,x'^2 + 4\,x' + 1 + 4\,y'^2 + 4\,y' + 1 = 4\,z'^2$$

Et en divisant par 2 :

$$2\,x'^2 + 2\,x' + 2\,y'^2 + 2\,y' + 1 = 2\,z'^2$$

Ce qui est absurde.

Donc les deux nombres x et y sont de parité différente. On peut, sans nuire à la généralité, supposer que x est pair et y impair, auquel cas z est impair. Posons :

$$x = 2\,x'$$

alors :

$$4\,x'^2 = z^2 - y^2$$

Soit :

$$4\,x'^2 = (z - y)\,(z + y)$$

y et z étant de même parité, $z - y$ et $y + z$ sont pairs, donc se mettent sous la forme :

$$\begin{cases} z + y = 2\,n \\ z - y = 2\,m \end{cases}$$

Ainsi :

$$x'^2 = n\,m$$

Montrons alors que n et m sont premiers entre eux en considérant un diviseur commun d à ces deux nombres. Alors d^2 divise $n\,m$ donc x'^2 et donc d divise x' donc x. Posons maintenant :

$$n = d\,n', \qquad m = d\,m'$$

Alors :

$$\begin{cases} z + y = 2\,d\,n' \\ z - y = 2\,d\,m' \end{cases}$$

Et par addition et soustraction membre à membre :

$$\begin{cases} 2\,z = 2\,d\,(n' + m') \\ 2\,y = 2\,d\,(n' - m') \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} z = d\,(n' + m') \\ y = d\,(n' - m') \end{cases}$$

Donc d divise y et z. Ainsi :

$$d = 1$$

Le produit de n par m étant un carré d'entier et les deux nombres étant premiers entre eux, ces nombres sont également des carrés d'entier. Posons donc :

$$n = r^2, \quad m = s^2$$

Alors :

$$\begin{cases} z + y = 2\, r^2 \\ z - y = 2\, s^2 \end{cases}$$

Donc en résolvant :

$$\begin{cases} z = r^2 + s^2 \\ y = r^2 - s^2 \end{cases}$$

Et

$$x'^2 = r^2\, s^2$$

Donc :

$$x' = r\, s$$

Et :

$$x = 2\, r\, s$$

Finalement :

$$(x, y, z) = (2\, r\, s, r^2 - s^2, r^2 + s^2\,), \quad r > s$$

Réciproquement, on vérifie que ce type de triplet est pythagoricien :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 4\, r^2\, s^2 + (r^2 - s^2)^2 - (r^2 + s^2)^2 = 0$$

Conclusion :

Les triplets pythagoriciens sont les triplets de la forme :

$$\boldsymbol{(x, y, z) = \left(2\, d\, r\, s, d\left(r^2 - s^2\right), d\left(r^2 + s^2\right)\right)}$$

Ou

$$\boldsymbol{(x, y, z) = \left(d\left(r^2 - s^2\right), 2\, d\;\, r\, s, d\left(r^2 + s^2\right)\right), \quad r > s}$$

pour $\boldsymbol{(r, d, s) \in \mathbb{N}^{*3}, \;\; r > s}$

Exemple : $d = 2, r = 5, s = 1$ donne :

$$20^2 + 48^2 = 52^2$$