Trigonométrie

Nous allons nous intéresser aux relations liant les angles et les côtés d'un triangle rectangle, ce que l'on appelle trigonométrie en commençant par définir les fonctions sinus, cosinus et tangente.

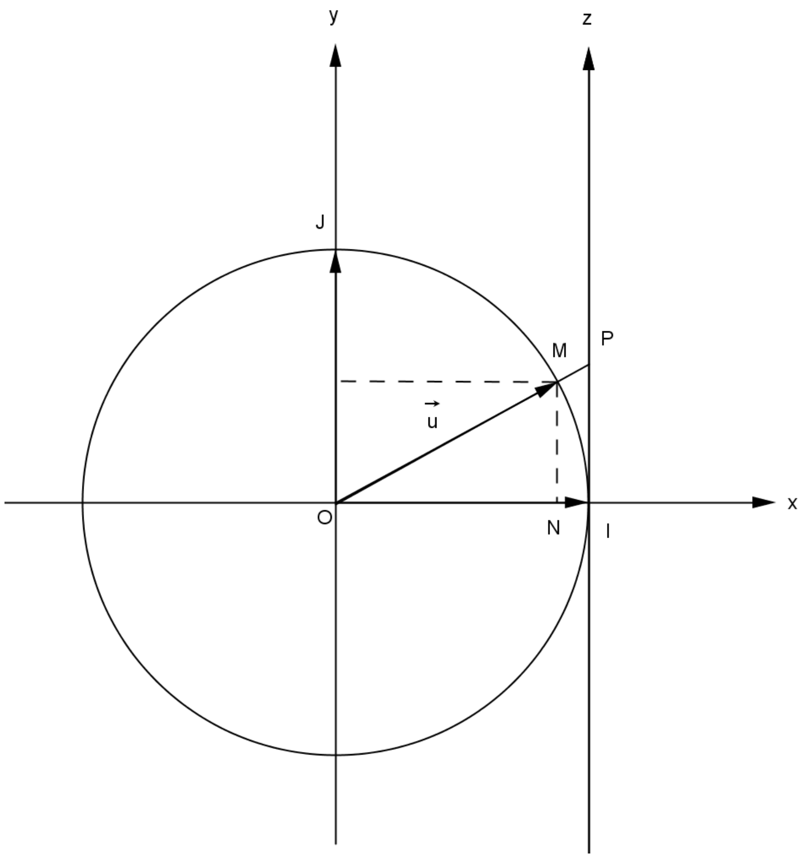
CHAPITRE I : Définitions

Etant donné une base orthonormée ($\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) directe pour l'orientation du plan choisie (sens trigonométrique généralement) et un vecteur unitaire $\vec{u}$ (de norme 1).

Posons :

$$\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}, \qquad \vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}, \quad \vec{u} = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$$

$$x\,\vec{\imath} = \overrightarrow{ON}, \quad y\,\vec{\jmath} = \overrightarrow{NM}$$



Considérons alors le triangle O N M rectangle en N. Dans le cas ou x et y sont strictement positifs, x et y sont respectivement le cosinus et le sinus de l'angle NÔM.

Introduisons alors la tangente en I au cercle unité de centre O et le point P d'intersection de cette tangente et de la droite (OM).

Posons :

$$\overrightarrow{\mathrm{IP}} = \mathrm{z}\,\vec{\jmath}$$

Alors z qui est l'abscisse de P sur l'axe gradué (I, $\vec{\imath}$) est la tangente de l'angle NÔM.

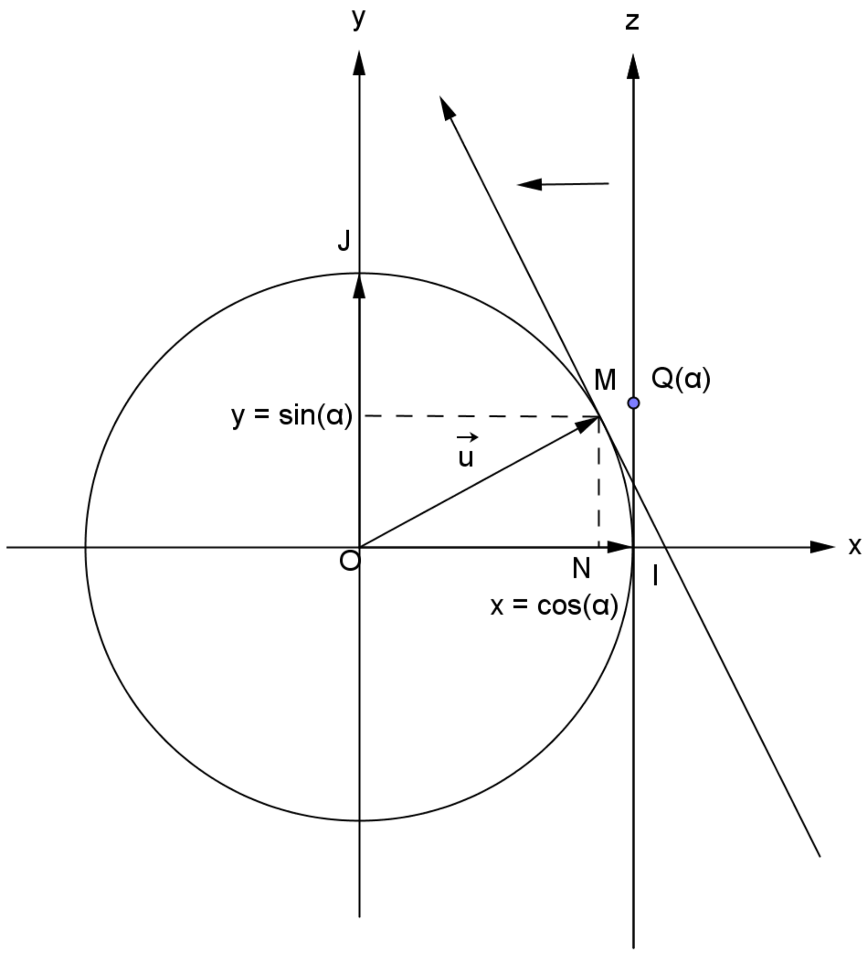
Nous avons ainsi pour x >0, y > 0

Cos(NÔM)= x
Sin(NÔM)= y
$\mathrm{Tan}\left(\mathrm{N\hat{O}M}\right) = \mathrm{z} = \dfrac{y}{x}$

Ces relations vont permettre de définir les fonctions sinus, cosinus et tangente sur l'ensemble des nombres réels.

Notons que l'angle NÔM est complètement défini par la mesure de l'angle orienté ($\vec{\imath}, \vec{u}$) qui pour x > 0 et y > 0 est dans l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Considérons alors un point Q sur l'axe tangent (I, $\vec{\jmath}$) d'abscisse α sur cet axe et faisons rouler par la pensée l'axe tangent sur le cercle dans le sens trigonométrique si α > 0 et dans le sens des aiguilles d'une montre sinon, jusqu'à ce que le point P rencontre le cercle en un point M.



Posons :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$$

On définit alors ainsi les images de α par les fonctions cosinus, sinus et tangente ainsi :

cos(α)= x
sin(α)= y
$\tan(\alpha) = \dfrac{y}{x}$

Notons que dans le cas où $\alpha \in \,]-\pi;\ \pi]$, α est la mesure principale de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \vec{u})$.

Dans les autres cas, α sera considéré comme une mesure de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \vec{u})$.

Notons alors que si α et β sont deux mesures de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \vec{u})$ alors :

$$\exists\, k \in \mathbb{Z} : \alpha = \beta + 2k\pi$$

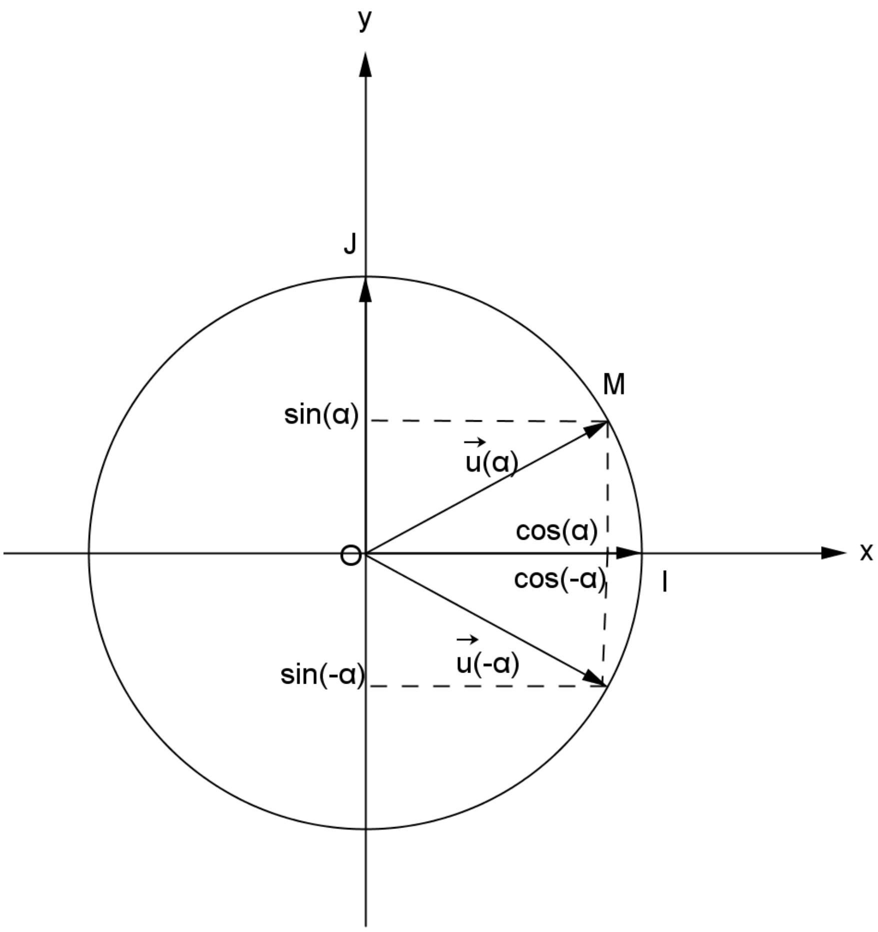
Nous conviendrons de noter $\vec{u}(\alpha)$ le vecteur unité dont une mesure de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \vec{u})$ est α. Ainsi :

$$\vec{u}(\alpha) = \cos(\alpha)\ \vec{\imath} + \sin(\alpha)\,\vec{\jmath}$$

CHAPITRE II : Propriétés de base

Le symétrique du vecteur $\vec{u}(\alpha)$ par rapport à $\vec{\imath}$ est :

$$\vec{u}(-\alpha) = \cos(\alpha)\ \vec{\imath} - \sin(\alpha)\,\vec{\jmath}$$



Ce qui donne les propriétés :

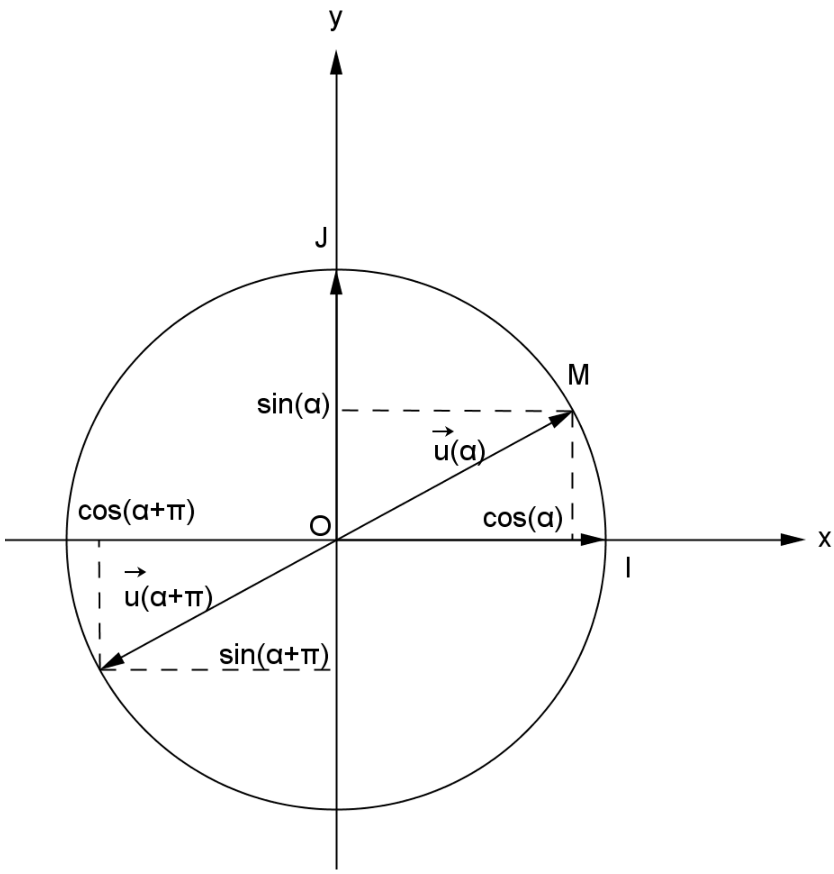
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

L'opposé de ce vecteur est :

$$\vec{u}(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)\ \vec{i} - \sin(\alpha)\,\vec{j}$$



Ce qui donne les propriétés :

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$$

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$$

L'orthogonal direct de ce vecteur est

$$\vec{u}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)\ \vec{i} + \cos(\alpha)\,\vec{j}$$

Ce qui donne les propriétés :

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$$

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha)$$

L'orthogonal indirect est :

$$\vec{u}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\alpha)\ \vec{i} - \cos(\alpha)\,\vec{j}$$

ce qui donne les propriétés :

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\alpha)$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\alpha)$$

Notons que :

$$\vec{u}(\alpha + 2\,\pi) = \vec{u}(\alpha - 2\,\pi) = \vec{u}(\alpha)$$

D'où la propriété de périodicité de période 2π des fonctions cosinus et sinus :

$$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$$

mais de période π pour la fonction tangente car $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$.

$\vec{u}(\alpha)$ étant un vecteur unitaire , nous en déduisons la propriété :

$$(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1$$

CHAPITRE II I : Valeurs remarquables

Cercle trigonométrique

Il est pratique de représenter sur un cercle unité les mesures principales notamment certaines mesures remarquables que nous allons présenter. Le cercle est alors qualifié de cercle trigonométrique. Portons ainsi les mesures $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π.

$$\vec{u}(0) = \vec{i}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\cos(0) = 1 \\ \sin(0) = 0\end{gathered}}$$

$$\vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{j}$$

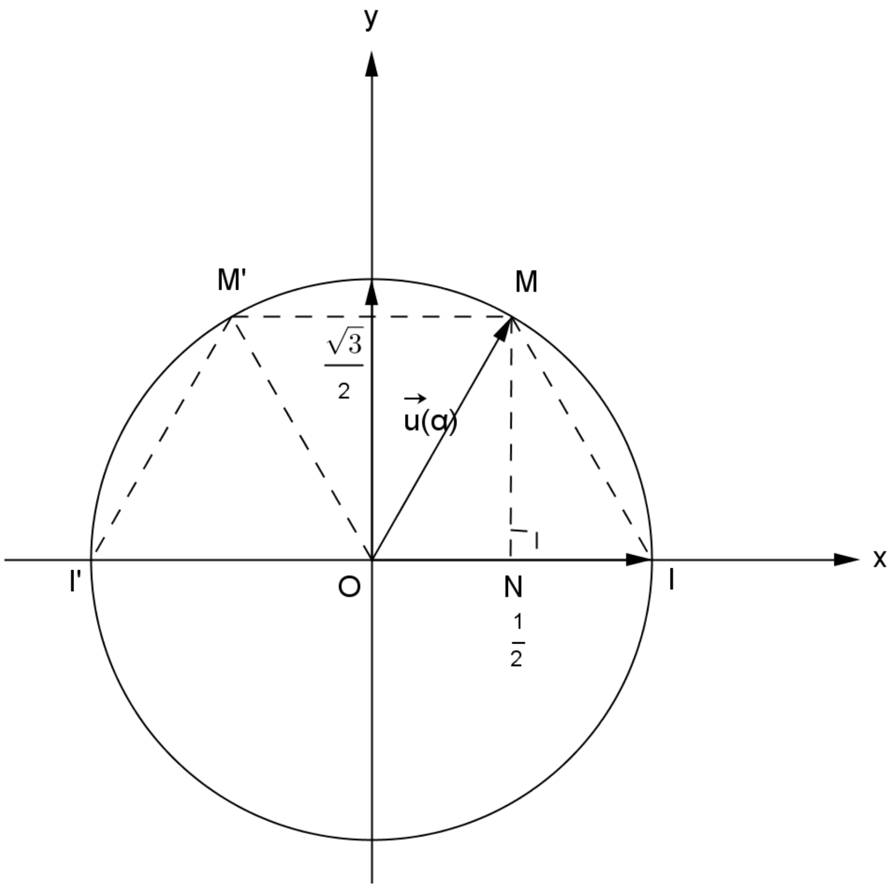
$$\boxed{\begin{gathered}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\end{gathered}}$$

$$\vec{u}(\pi) = -\vec{i}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\cos(\pi) = -1 \\ \sin(\pi) = 0\end{gathered}}$$

Considérons le vecteur unitaire suivant :

$$\vec{u}(\alpha) = \frac{1}{2}\vec{i} + y\,\vec{j} \quad \text{avec} \quad y > 0$$



En écrivant que la norme de ce vecteur est égale à 1 on en déduit :

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Posons alors :

$$\vec{u}(\alpha) = \overrightarrow{OM}, \qquad \frac{1}{2}\,\vec{\imath} = \overrightarrow{ON}$$

Le triangle OMI est isocèle en O car OM = OI. D'autre part la droite (NM) coupe le segment [O ; I] perpendiculairement en son milieu, c'est donc sa médiatrice et donc : OM = IM. Le triangle OMI est donc équilatéral.

Les mêmes considérations peuvent être faites en considérant le vecteur :

$$\vec{u}(\beta) = \overrightarrow{OM'} = -\frac{1}{2}\,\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{\jmath}$$

En notant I' le symétrique de I par rapport à O, le triangle OM'I' est équilatéral. Puisque que l'angle I'ÔI est un angle plat :

$$\left(\vec{\imath};\ \vec{u}(\alpha)\right) = \overrightarrow{(u}(\alpha);\vec{u}(\beta)) = (\vec{u}(\beta);-\vec{\imath}) = \frac{\pi}{3}$$

Ainsi :

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2\,\pi}{3}$$

D'où :

$$\vec{u}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\,\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{\jmath}$$

Donc :

$$\boxed{\begin{gathered}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{gathered}}$$

$$\vec{u}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\,\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{\jmath}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{gathered}}$$

Des considérations analogues peuvent être faites avec les vecteurs :

$$\vec{u}(\alpha) = \overrightarrow{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{\imath} + \frac{1}{2}\,\vec{\jmath} \quad \text{et} \quad \vec{u}(\beta) = \overrightarrow{OM'} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{\imath} - \frac{1}{2}\,\vec{\jmath}$$

En notant J' le symétrique de J par rapport à O elles conduisent au caractère équilatéral des triangles OMJ et OM'J' et donc à :

$$\left(\vec{u}(\alpha);\ \vec{u}(\beta)\right) = \frac{\pi}{3}$$

Donc :

$$(\vec{\imath}\,;\vec{u}(\alpha)) = (\vec{u}(\beta)\,;\vec{\imath}) = \frac{\pi}{6}$$

Soit :

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\pi}{6}$$

Et :

$$\vec{u}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{i} + \frac{1}{2}\,\vec{j}$$

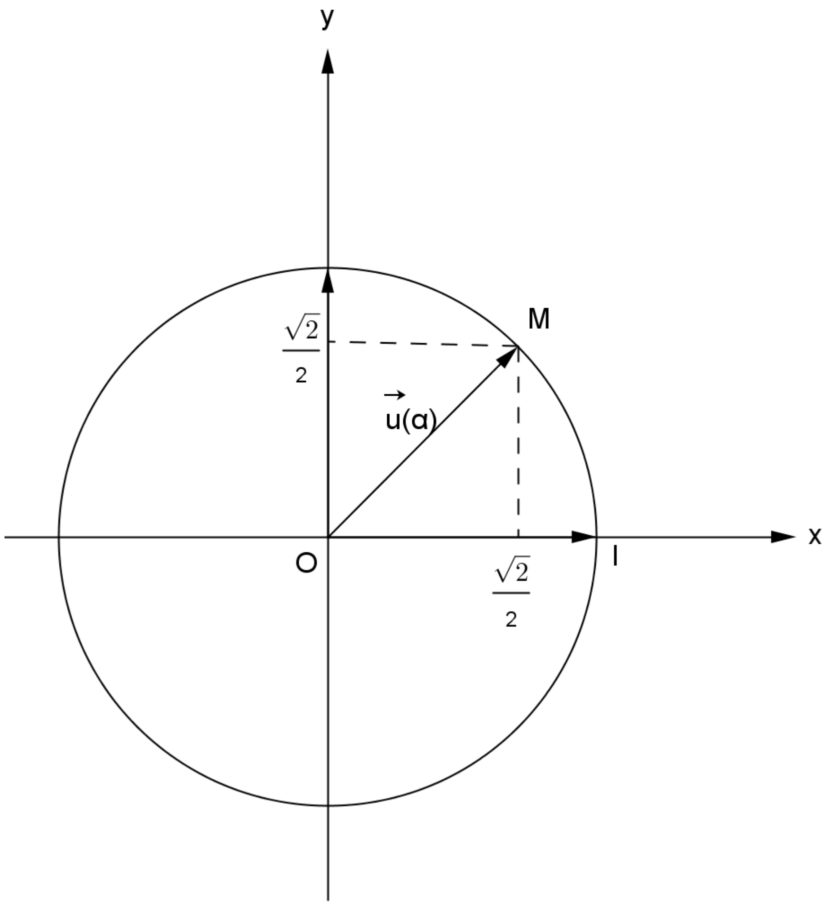
$$\boxed{\begin{gathered}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\end{gathered}}$$

Considérons maintenant le vecteur unitaire suivant :

$$\vec{u}(\alpha) = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + x\,\vec{j} \quad \text{avec} \quad x > 0$$

En écrivant que sa norme vaut 1 on obtient :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Or (OM) est la bissectrice de l'angle IÔJ donc :

$$\left(\vec{i}\,;\ \vec{u}(\alpha)\right) = \left(\vec{u}(\alpha)\,;\ \vec{j}\right) = \frac{\pi}{4}$$

D'où :

$$\vec{u}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{j}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

CHAPITRE IV : Formules de duplication

La base de ces formules est de déterminer les cosinus et sinus d'un angle à partir de ceux de l'angle double d'où le qualificatif de duplication. Ces formules serviront à établir l'encadrement de π obtenu par Archimède.

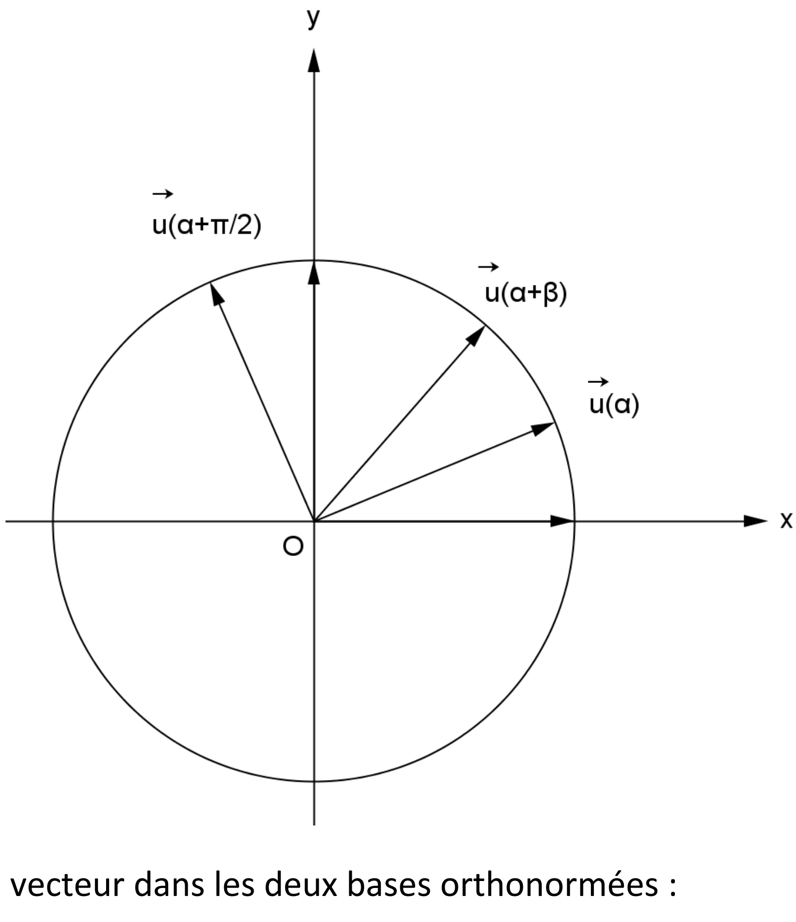
Etant donné une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ directe et α et β deux réels quelconques , considérons les vecteurs :

$$\vec{I} = \vec{u}(\alpha) \quad \text{et} \quad \vec{J} = \vec{u}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

Le couple de vecteurs $(\vec{I}, \vec{J})$ forme alors une base directe.

Soit alors :

$$\vec{v} = \vec{u}(\alpha + \beta)$$



Décrivons ce vecteur dans les deux bases orthonormées :

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\boxed{\vec{v} = \cos(\alpha + \beta)\ \vec{i} + \sin(\alpha + \beta)\,\vec{j}}$$

Dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$:

$$\vec{v} = \cos(\beta)\ \vec{I} + \sin(\beta)\,\vec{J}$$

$$= \cos(\beta)\ (\cos(\alpha)\ \vec{i} + \sin(\alpha)\,\vec{j}) + \sin(\beta)\,(-\sin(\alpha)\ \vec{i} + \cos(\alpha)\,\vec{j})$$

$$= (\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta))\,\vec{i} + (\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta))\,\vec{j}$$

On en déduit , par identification des coordonnées les formules :

$$\boxed{\begin{cases}\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\end{cases}}$$

Et en remplaçant β par – β :

$$\begin{cases}\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(-\beta) - \sin(\alpha)\sin(-\beta)\\ \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(-\beta) + \cos(\alpha)\sin(-\beta)\end{cases}$$

Soit en utilisant les propriétés de parité de sinus et cosinus :

$$\boxed{\begin{cases}\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\\ \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)\end{cases}}$$

En prenant alors $\alpha = \beta$, on obtient les formules de duplication proprement dites :

$$\begin{cases}\cos(2\,\alpha) = \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha)\\ \sin(2\,\alpha) = \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\end{cases}$$

Soit après simplification

$$\boxed{\begin{cases}\cos(2\,\alpha) = \left(\cos(\alpha)\right)^2 - \left(\sin(\alpha)\right)^2 = 2\left(\cos(\alpha)\right)^2 - 1 = 1 - 2\left(\sin(\alpha)\right)^2\\ \sin(2\,\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\end{cases}}$$

CHAPITRE V : Encadrement de Pi

Commençons par noter que les formules de duplication permettent d’obtenir les cosinus et sinus d’un angle à partir de ceux de son double.

Les formules précédentes peuvent en effet se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} \left(\cos(\alpha)\right)^2 = \dfrac{1 + \cos(2\,\alpha)}{2} \\ \left(\sin(\alpha)\right)^2 = \dfrac{1 - \cos(2\,\alpha)}{2} \end{cases}$$

Ainsi, dans le cas où α est dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$ sont tous deux positifs ou nuls donc :

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \sqrt{\dfrac{1 + \cos(2\,\alpha)}{2}} \\ \sin(\alpha) = \sqrt{\dfrac{1 - \cos(2\,\alpha)}{2}} \end{cases}$$

Il est alors facile, connaissant les sinus et cosinus d'une valeur remarquable d'obtenir les sinus et cosinus des divisions successives par deux de ces valeurs.

Partons ainsi de :

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\dfrac{1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}{2}} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\dfrac{1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}{2}} \end{cases}$$

Soit après simplifications :

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

Et ainsi de suite :

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{48}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{48}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{96}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{96}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2} \end{cases}$$

Notons une propriété géométrique des sinus , cosinus et tangente d'une valeur de l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

$$\sin(\alpha) < \alpha < \tan(\alpha)$$

Ainsi :

$$\sin\left(\frac{\pi}{96}\right) < \frac{\pi}{96} < tan\left(\frac{\pi}{96}\right)$$

soit :

$$96\sin\left(\frac{\pi}{96}\right) < \pi < 96\tan\left(\frac{\pi}{96}\right)$$

Ceci permit à Archimède d'obtenir, au prix de calculs de racine carrées que l'on imagine fastidieux, l'encadrement suivant :

$$3{,}141 < \pi < 3{,}143$$

CHAPITRE VI : Autres propriétés

D'autres propriétés très utiles en sciences peuvent être déduites des précédentes.

Soient x et y deux réels quelconques. Alors il existe un unique couple (α, β) de réels tels que :

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta \end{cases}$$

A savoir :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{x+y}{2} \\ \beta = \dfrac{x-y}{2} \end{cases}$$

Donc :

$$\cos(x) + \cos(y) = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$= 2\cos(\alpha)\cos(\beta)$$

D’où une formule de factorisation :

$$\boxed{\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

Par une démarche analogue, on obtient :

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

On vérifie également aisément les formules de développement :

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) + \cos(x-y)\big)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big(\cos(x+y) - \cos(x-y)\big)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big(\sin(x+y) + \sin(x-y)\big)$$

CHAPITRE VII : Dérivées des fonctions sinus et cosinus

Nous allons établir la dérivée des fonctions sinus et cosinus à partir de la définition géométrique donnée à ces fonctions, ce qui permettra de les construire de manière analytique au prochain chapitre.

Pour cela, revenons sur l'encadrement déduit géométriquement :

$$\forall\, x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\quad : \qquad \sin(x) < x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

On en déduit :

$$\forall\, x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\quad : \qquad \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$$

D'où en faisant tendre x vers 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Donc :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(-x)}{-x} = 1$$

Soit :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Formons alors le taux d'accroissement de sinus entre deux réels x et x + h :

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{2\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\ \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h}$$

$$= \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\ \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$

Soit en posant :

$$H = \frac{h}{2} \quad \text{soit } h = 2\,H$$

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \cos(x+H)\,\frac{\sin(H)}{H}$$

Ainsi :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \lim_{H\to 0}\cos(x+H)\,\frac{\sin(H)}{H} = \cos\,(x)$$

Donc sin(x) est dérivable sur ℝ et :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad (\sin(x))' = \cos\,(x)}$$

Un travail analogue peut être fait pour cos(x) à partir du taux d'accroissement mais on peut aussi noter que :

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Ainsi :

$$(\cos(x))' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

D'où :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad (\cos(x))' = -\sin\,(x)}$$

Il est intéressant de noter que l'on a :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R} : \quad (\sin(x))' &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ (\cos(x))' &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}}$$

Ceci permet d'obtenir une formule simple pour les dérivées successives.

Ainsi les dérivées d'ordre n où n est un entier naturel non nul sont :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R} : \quad (\sin(x))^{(n)} &= \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right) \\ (\cos(x))^{(n)} &= \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}}$$

On en déduit également les dérivées composées avec une fonction u dérivable sur un intervalle I :

$$\forall\, x \in I : \quad \big(\sin\big(u(x)\big)\big)' = u'(x)\ \cos(u(x))$$
$$(\cos(u(x)))' = -\,u'(x)\ \sin(u(x))$$

CHAPITRE VIII : Construction analytique des fonctions sinus et cosinus

Les fonctions sinus et cosinus ont été définies d'une manière géométrique, il conviendrait de les définir d'une manière plus rigoureuse d'un point de vue mathématique. Pour cela nous allons employer une technique analogue à celle développée pour la construction de la fonction exponentielle ou de la fonction logarithme, à savoir déterminer une relation caractéristique entre f et ses dérivées, appelée équation différentielle.

Notons pour cela que sin(x) et cos(x) vérifient toutes deux :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad f''(x) = -f(x)$$

Ceci est une équation différentielle linéaire d'ordre deux à coefficients constants pour laquelle nous montrerons dans un prochain chapitre le résultat suivant :

Si g et h sont deux fonctions linéairement indépendante, à savoir qu'il n'existe aucun réel k tel que g = k h, alors les solutions de l'équation sont les fonctions f de la forme f = A g + B h, A et B étant deux constantes réelles quelconques. Les solutions dépendent donc de deux paramètres A et B. Pour les fixer, il faut imposer à f deux relations, par exemple les valeurs de f(0) et f'(0).

On pose alors que sin(x) est l'unique fonction vérifiant l'équation différentielle aux conditions initiales définies suivante :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R} : f''(x) = -f(x) \\ f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

Et pour cos(x) l'équation

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R} : f''(x) = -f(x) \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

Ceci va nous permettre de les construire en cherchant une sorte de polynôme ayant un degré infini, appelé série entière.

Ainsi :

sin(x) =a + b x + …

compte tenu de $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ donne :

sin(x) = x + …

De même :

cos(x) = a + b x +…

compte tenu de $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$ donne :

cos(x) = 1+…

compte tenu de :

$$\cos(x)' = -\sin(x) = -x + \cdots$$

par primitive :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots$$

compte tenu de sin(x) ‘ = cos(x) :

$$\sin(x)' = \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots$$

par primitive

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Et ainsi de suite, ce qui aboutit à :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

On est donc amené à définir les fonctions cosinus et sinus par :

$$\cos(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Il reste à s'assurer que les limites sont bien définies et que les propriétés de sin(x) et cos(x) ainsi définies sont bien celles obtenues géométriquement.