Matrices trigonalisables

I Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. A est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, c'est-à-dire si il existe une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T toutes deux d'ordre n telles que :

$$A = P\,T\,P^{-1}$$

Dans ce cas, A et Tayant même polynôme caractéristiques, le polynôme caractéristique de A est :

$$\pi_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - X)$$

Où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les éléments diagonaux de T.

On en déduit que si A est trigonalisable alors son polynôme caractéristique est scindé. Nous allons voir avec la décomposition de Jordan que toute matrice dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable.

II Décomposition de Jordan d'une matrice à polynôme caractéristique scindé

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ et à polynôme caractéristique scindé donc de la forme :

$$\pi_A(X) = \prod_{i=1}^{p}(\lambda_i - X)^{n_i}$$

Où $\lambda_1, \lambda_2, \dots\ \lambda_p$ désignent les p valeurs propres distinctes de A avec leurs ordres de multiplicité respectifs $n_1, n_2, \dots\ n_p$.

Notons pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:

$$\mathbb{E}_i = ker((A - \lambda_i\, I)^{n_i})$$

Désignons par $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel des colonnes d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Le théorème des noyaux indique que :

$$\mathbb{E} = ker((A - \lambda_1\, I)^{n_1}) \oplus\ ker((A - \lambda_2\, I)^{n_2}) \oplus \dots \oplus\ ker\left(\left(A - \lambda_p\, I\right)^{n_p}\right)$$

Or pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, si $X \in \mathbb{E}_i$ alors :

$$(A - \lambda_i\, I)^{n_i}\, X = 0$$

Donc :

$$(A - \lambda_i\, I)^{n_i}\, A\, X = A\,(A - \lambda_i\, I)^{n_i}\, X = 0$$

Soit :

$$A\, X \in \mathbb{E}_i$$

Les sous espaces $\mathbb{E}_i$ sont donc stables par A.

Pour chacun de ces p espaces $\mathbb{E}_i$, considérons alors une base $\left(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ir_i}\right)$ où $r_i = dim(\mathbb{E}_i)$.

L'union de ces bases forme une base de $\mathbb{E}$ de matrice de passage par rapport à la base canonique que nous noterons Q.

Formons pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ une matrice Q_i à n lignes avec les r_i colonnes $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ir_i}$. La stabilité de $\mathbb{E}_i$ par A se traduit par l'existence d'une matrice B_i d'ordre r_i telle que :

$$A\, Q_i = Q_i\, B_i$$

Donc :

$$(A - \lambda_i\, I)\, Q_i = Q_i\, B_i - \lambda_i\, Q_i = Q_i\left(B_i - \lambda_i\, I_{r_i}\right)$$

Posons :

$$N_i = B_i - \lambda_i\, I_{r_i}$$

Alors :

$$(A - \lambda_i\, I)\, Q_i = Q_i\, N_i$$

$$(A - \lambda_i\, I)^2\, Q_i = (A - \lambda_i\, I)\, Q_i\, N_i = Q_i\, N_i\ \ N_i = Q_i\, {N_i}^2$$

$$(A - \lambda_i\, I)^3\, Q_i = Q_i\, {N_i}^3$$

Et ainsi de suite jusqu'à :

$$(A - \lambda_i\, I)^{n_i}\, Q_i = Q_i\, {N_i}^{r_i}$$

Donc :

$$Q_i\, {N_i}^{r_i} = 0$$

Or Q_i est une matrice de rang r_i donc on peut en extraire une matrice inversible R_i d'ordre r_i On a alors :

$$R_i\, {N_i}^{r_i} = 0$$

Donc :

$${N_i}^{r_i} = 0$$

N_i est donc une matrice nilpotente. Elle est donc semblable à une matrice triangulaire supérieure T'_i avec des 0 sur la diagonale. Il existe donc une matrice inversible P_i d'ordre r_i telle que :

$$N_i = P_i\, T'_i\, {P_i}^{-1}$$

Ainsi :

$$A\, Q_i = Q_i\left(\lambda_i\, I_{r_i} + N_i\right) = Q_i\left(\lambda_i\, I_{r_i} + P_i\, T'_i\, {P_i}^{-1}\right) =$$

$$Q_i\left(P_i\left(\lambda_i\, I_{r_i} + T'_i\right) {P_i}^{-1}\right) = Q_i\, P_i\, T_i\, {P_i}^{-1}$$

Où T_i est une matrice triangulaire supérieure ayant pour éléments diagonaux le même terme λ_i.

On a alors :

$$A\,Q = Q\,A'$$

Où A' est une matrice formée des p blocs diagonaux $P_i\,T_i\,{P_i}^{-1}$.

En formant alors une matrice P avec les p blocs diagonaux P_i et une matrice T avec les p blocs diagonaux T_i on a alors :

$$A\,Q = Q\,P\,T\,P^{-1}$$

Soit :

$$A = (Q\,P)\,T\,(Q\,P)^{-1}$$

A est donc semblable à la matrice triangulaire supérieure T.

De plus, comme elle a le même polynôme caractéristique que T, on a :

$$\pi_A(X) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{r_i}$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$: $r_i = n_i$

Résumons :

Toute matrice carrée $\boldsymbol{A}$ à polynôme caractéristique scindé est trigonalisable. Plus précisément, si $\boldsymbol{n_i}$ est l'ordre de multiplicité d'une racine $\boldsymbol{\lambda_i}$ de ce polynôme (donc une valeur propre de $\boldsymbol{A}$) alors :

$$\boldsymbol{dim\big(ker((A - \lambda_i\,I)^{n_i})\big) = n_i}$$

Autrement dit la dimension du sous espace caractéristique $\boldsymbol{ker((A - \lambda_i\,I)^{n_i})}$ associé à une valeur propre $\boldsymbol{\lambda_i}$ est égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre dans le polynôme caractéristique

III Décomposition par blocs de Jordan

Soit $\boldsymbol{A}$ une matrice carrée d'ordre $\boldsymbol{n}$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ et à polynôme caractéristique scindé. Reprenons la décomposition obtenue précédemment :

$$\boldsymbol{A = S\,T\,S^{-1}}$$

Où $\boldsymbol{S}$ est une matrice inversible, $\boldsymbol{T}$ une matrice triangulaire supérieure formée de blocs diagonaux $\boldsymbol{T_i}$, les deux étant d'ordre $\boldsymbol{n}$, et les $\boldsymbol{T_i}$ se mettant sous forme :

$$\boldsymbol{T_i = \lambda_i\,I_{n_i} + T'_i}$$

Où $\boldsymbol{T'_i}$ est une matrice nilpotente, qui est donc semblable à une matrice formée de blocs diagonaux de Jordan de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{T_i}$ est donc semblable à une matrice formée de blocs diagonaux de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & \lambda_i & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Et il en va de même pour A qui est semblable à une matrice formée d'un ou plusieurs blocs diagonaux pour chacune des p valeurs propres de A.

Si de plus on note, pour chaque valeur propre λ_i, β_i le plus grand ordre des blocs diagonaux qui lui sont associés, alors on a pour le polynôme minimal :

$$\boldsymbol{m_A(X) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{\beta_i}}$$

Exemple :

$$T = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & & & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & & & & \\ & & \boxed{1} & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}} & & \\ 0 & & & & \boxed{2} & \end{pmatrix}$$

Cette matrice a deux valeurs propres qui sont ses éléments diagonaux 1 et 2. Pour la valeur propre 1, le plus grand bloc diagonal est d'ordre 3, et pour la valeur propre 2 également. On en déduit :

$$\pi_A(X) = (1 - X)^6\,(2 - X)^4$$

$$m_A(X) = (X - 1)^3\,(X - 2)^3$$